INTRODUCCION

Á LA

GEOMETRIA SUPERIOR,

POR EL

SR. D. JOSE ECHEGARAY,

individuo de la Real Academia de Ciencias.

(Revista de los progresos de las Ciencias, t. 16.)

MADRID:
IMPRENTA Y LIBRERÍA DE D. EUSEBIO AGUADO.—PONTEJOS, 8.
1867.

N.º —

INTRODUCCION

Á LA

GEOMETRIA SUPERIOR.

Me propongo publicar en esta serie de artículos un breve resúmen de las principales teorías que constituyen hoy la *Geometría superior*, y facilitar de este modo á la juventud el estudio de las obras clásicas, entre las que debo citar como principal la *Geometría superior* de Mr. Chasles, uno de los primeros matemáticos de nuestra época.

En España desgraciadamente nunca se ha esplicado esta materia, ni *jamás* se ha contado con ella en nuestros programas de enseñanza: verdad es que la misma suerte han corrido y corren otras muchas.

Yo no puedo tener la aspiracion de llenar ni aun en mínima parte tal vacío; pero si al menos estos artículos, imperfectos como son, consiguen despertar el gusto por estudios tan importantes, daré por bien empleado mi trabajo.=*José Echegaray*.

PRIMERA PARTE.

I.—*Relaciones anarmónicas de cuatro puntos.*

Núm. 1. *Definicion.* Fijemos sobre una recta indefinida XX' (*fig.* 1.ª) cuatro puntos cualesquiera a, b, c, d; dividamos estos cuatro puntos en dos grupos, por ejemplo, a, b el primero; c, d el segundo; formemos la relacion $\frac{a\,c}{b\,c}$ de las distancias de los dos puntos del primer grupo á uno c del segundo; formemos igualmente la relacion $\frac{a\,d}{b\,d}$ de las distancias de dichos dos primeros puntos al cuarto d; y dividamos, por último, una por otra las dos relaciones anteriores.

Dicha *relacion compuesta* $\frac{a\,c}{b\,c} : \frac{a\,d}{b\,d}$ recibe el nombre de *relacion anarmónica* de los cuatro puntos dados. En ella las cuatro distancias $a\,c$, $b\,c$, $a\,d$, $b\,d$, entran no solo con su valor numérico, sino tambien con el signo que les corresponde, segun el sentido en que se cuenten sobre el eje XX' las distancias positivas. Así pues, suponiendo que las distancias positivas se cuenten en el sentido XX', y en el sentido opuesto $X'X$ las negativas, es evidente que las distancias $a\,c$, $b\,c$, $a\,d$, $b\,d$ serán positivas, y que la *relacion anarmónica* $\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$ tendrá en este caso el signo $+$

Por el contrario, si los cuatro puntos a, b, c, d estuvieran distribuidos como indica la *figura* **2.ª** las longitudes ac, bc, ad, bd serian respectivamente

ac	negativa
bc	negativa
ad	positiva
bd	negativa

y la relacion anarmónica $\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$ seria por lo tanto *negativa.*

Núm. **2.** Ahora bien, la relacion anarmónica *¿es única* para cuatro puntos dados, sea cual fuere la distribucion de estos en dos grupos, ó depende por el contrario de dicha distribucion y con ella varia, tomando en cada caso un valor distinto? Y si á estas varias agrupaciones ó á algunas de ellas corresponden relaciones anarmónicas diferentes, ¿serán estos diversos valores independientes entre sí, ó estarán enlazados de tal manera que, por ejemplo, determinado uno quedarán, en funcion de este, determinados los restantes?

Para resolver la primera de estas dudas, es decir, para conocer si la relacion anarmónica de cuatro puntos es *única,* hallemos las **24** agrupaciones que con cuatro letras pueden formarse, y determinemos para cada una de dichas agrupaciones la relacion anarmónica que le corresponde.

La *tabla* siguiente indica esta série de operaciones.

Agrupaciones.	Relaciones anarmónicas.	Relaciones anarmónicas distintas.	OBSERVACIONES.
$a,b \quad c,d$	$\frac{ac}{bc}:\frac{ad}{bd}=\frac{ac\times bd}{bc\times ad}$	$=m$	1.ª Nótese que en general ab es igual á $-ba$. 2.ª Hemos representado por m, n y p, las tres relaciones que generalmente consideran los autores como *principales*, pero es claro que hubiéramos podido escoger otras varias: por ejemplo $\frac{1}{m}$, que llamaríamos m', $\frac{1}{n}=n'$, y p; en cuyo caso m', n' y p serian las relaciones anarmónicas principales, y $\frac{1}{m'}$, $\frac{1}{n'}$, y $\frac{1}{p}$ las inversas.
$b,a \quad c,d$	$\frac{bc}{ac}:\frac{bd}{ad}=\frac{bc\times ad}{ac\times bd}$	$=\frac{1}{m}$	
$a,b \quad d,c$	$\frac{ad}{bd}:\frac{ac}{bc}=\frac{ad\times bc}{bd\times ac}$	$=\frac{1}{m}$	
$b,a \quad d,c$	$\frac{bd}{ad}:\frac{bc}{ac}=\frac{bd\times ac}{ad\times bc}$	$=m$	
$a,c \quad b,d$	$\frac{ab}{cb}:\frac{ad}{cd}=\frac{ab\times cd}{cb\times ad}$	$=\frac{1}{n}$	
$c,a \quad b,d$	$\frac{cb}{ab}:\frac{cd}{ad}=\frac{cb\times ad}{ab\times cd}$	$=n$	
$a,c \quad d,b$	$\frac{ad}{cd}:\frac{ab}{cb}=\frac{ad\times cb}{cd\times ab}$	$=n$	
$c,a \quad d,b$	$\frac{cd}{ad}:\frac{cb}{ab}=\frac{cd\times ab}{ad\times cb}$	$=\frac{1}{n}$	
$a\,d \quad b\,c$	$\frac{ab}{db}:\frac{ac}{dc}=\frac{ab\times dc}{db\times ac}$	$=p$	
$d\,a \quad b\,c$	$\frac{db}{ab}:\frac{dc}{ac}=\frac{db\times ac}{dc\times ab}$	$=\frac{1}{p}$	
$a\,d \quad c\,b$	$\frac{ac}{dc}:\frac{ab}{db}=\frac{ac\times db}{dc\times ab}$	$=\frac{1}{p}$	
$d\,a \quad c\,b$	$\frac{dc}{ac}:\frac{db}{ab}=\frac{dc\times ab}{ac\times db}$	$=p$	

bc	ad	$\frac{ba}{ca} : \frac{bd}{cd} = \frac{ba \times cd}{ca \times bd}$	$= p$
cb	ad	$\frac{ca}{ba} : \frac{cd}{bd} = \frac{ca \times bd}{ba \times cd}$	$= \frac{1}{p}$
bc	da	$\frac{bd}{cd} : \frac{ba}{ca} = \frac{bd \times ca}{cd \times ba}$	$= \frac{1}{p}$
cb	da	$\frac{cd}{bd} : \frac{ca}{ba} = \frac{cd \times ba}{bd \times ca}$	$= p$
bd	ac	$\frac{ba}{da} : \frac{bc}{dc} = \frac{ba \times dc}{da \times bc}$	$= \frac{1}{n}$
db	ac	$\frac{da}{ba} : \frac{dc}{bc} = \frac{da \times bc}{ba \times dc}$	$= n$
bd	ca	$\frac{bc}{dc} : \frac{ba}{da} = \frac{bc \times da}{dc \times ba}$	$= n$
db	ca	$\frac{dc}{bc} : \frac{da}{ba} = \frac{dc \times ba}{bc \times da}$	$= \frac{1}{n}$
cd	ab	$\frac{ca}{da} : \frac{cb}{db} = \frac{ca \times db}{da \times cb}$	$= m$
dc	ab	$\frac{da}{ca} : \frac{db}{cb} = \frac{da \times cb}{ca \times db}$	$= \frac{1}{m}$
cd	ba	$\frac{cb}{db} : \frac{ca}{da} = \frac{cb \times da}{db \times ca}$	$= \frac{1}{m}$
dc	ba	$\frac{db}{cb} : \frac{da}{ca} = \frac{db \times ca}{cb \times da}$	$= m$

De aquí se deduce ya esta primera consecuencia:

Entre las 24 relaciones anarmónicas de cuatro puntos, solo hay *seis* distintas, que son las designadas por m, n, p, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$, y aun de estas, *tres* son inversas de las otras *tres*.

Se observa además fácilmente:

1.° Que variando el órden de las letras *en uno*, y solo en *uno*, de los grupos binarios, la relacion anarmónica se invierte. Por ejemplo, [b, c ... a, d] da el valor p, y [c, b ... a, d] ó bien [b, c ... d, a] dan el valor inverso $\frac{1}{p}$.

2.° Que invirtiendo el órden en ambos grupos, la relacion anarmónica queda invariable. Por ejemplo, [b, c ... a, d] y [c, b ... d, a] corresponden al mismo valor p.

3.° Que cambiando una letra del primer grupo binario por otra del segundo la relacion anarmónica cambia radicalmente de valor. Así los tres valores m, n, p corresponden á las tres agrupaciones [a, b ... c, d], [c, a ... b, d] y [a, d ... b, c], es decir á las agrupaciones que se obtienen combinando la letra a, en el primer grupo, con las otras tres b, c, d.

Núm. 3. Para resolver la segunda duda veamos si las tres relaciones anarmónicas principales

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{ac \times bd}{bc \times ad} = m; \quad \frac{cb}{ab} : \frac{cd}{ad} = \frac{cb \times ad}{ab \times cd} = n;$$

$$\frac{ab}{db} : \frac{ac}{dc} = \frac{ab \times dc}{db \times ac} = p;$$

correspondientes á las tres agrupaciones [a, b ... c, d], [c, a ... b, d], [a, d ... b, c], son independientes entre sí, ó si, por el contrario, dada una de ellas se pueden espresar las otras dos en funcion de esta.

A fin de reducir al menor número posible las cantidades que entran en las relaciones anarmónicas, hagamos (*fig.* 3.ª)

$$ab = x \,;\; ac = y \,;\; ad = z \,;$$

y en efecto, *para fijar un sistema de cuatro puntos* basta conocer las distancias de tres de ellos, que aquí son b, c y d, al primero a, tomado como origen, y además los signos de estas distancias.

La primera relacion $\dfrac{ac \times bd}{bc \times ad} = m$ tomará la forma

$$\frac{y\,(z - x)}{(y - x)\,z} = m \qquad (1)$$

sustituyendo por las distancias ac, bd, bc y ad sus valores

$$ac = y \,;\; bd = (z - x) \,;\; bc = y - x \,;\; ad = z.$$

Del mismo modo la segunda relacion anarmónica

$$\frac{cb \times ad}{ab \times cd} = n$$

se convertirá en

$$\frac{(x - y)\,z}{x\,(z - y)} = n. \qquad (2)$$

Para que entre m y n exista una relacion determinada, es decir, para que una de estas relaciones se exprese en funcion de la otra y de cantidades conocidas, es *necesario* y *suficiente* que eliminando entre las ecuaciones (1) y (2) una de las cantidades x, y, z, desaparezcan las otras dos.

Despejando por ejemplo x de la (1) resulta:

$$x = \frac{yz\,(m - 1)}{mz - y}$$

y sustituyendo en la (2)

$$\frac{\left(\frac{y\,z\,(m-1)}{m\,z-y}-y\right)z}{\frac{y\,z\,(m-1)}{m\,z-y}(z-y)}=n;$$

ó simplificando,

$$-\frac{1}{m-1}=n;$$

y finalmente,

$$n=\frac{1}{1-m}.$$

Así pues, la segunda relacion anarmónica n es funcion de la primera, m, y dada *esta*, el valor de *aquella* se obtiene por la fórmula anterior.

Trasformando por el mismo método la tercera relacion anarmónica

$$\frac{a\,b\times d\,c}{d\,b\times a\,c}=p,$$

tendremos

$$\frac{x\,(y-z)}{(x-z)\,y}=p:$$

eliminando x entre esta y la

$$\frac{(x-y)\,z}{x\,(z-y)}=n$$

desaparecen y y z, y resulta por último

$$p=\frac{1}{1-n};$$

ó si queremos espresar p en funcion de m,

$$p = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-m}} = 1 - \frac{1}{m}$$

En resúmen, dados cuatro puntos a, b, c, d, sobre una recta resulta lo siguiente:

1.° Queda completamente determinada la relacion anarmónica

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = m.$$

2.° Quedan igualmente determinadas las relaciones

$$\frac{cb}{ab} : \frac{cd}{ad} = n, \text{ y } \frac{ab}{db} : \frac{ac}{dc} = p$$

en funcion de la primera, por las fórmulas

$$n = \frac{1}{1-m}, \; p = 1 - \frac{1}{m}.$$

3.° Las tres restantes

$$\frac{bc}{ac} : \frac{bd}{ad}; \; \frac{ab}{cb} : \frac{ad}{cd}; \text{ y } \frac{db}{ab} : \frac{dc}{ac},$$

son inversas de las precedentes, es decir, iguales á

$$\frac{1}{m}, \; \frac{1}{n}, \; \frac{1}{p}.$$

4.° Y por último, las demás relaciones son iguales á estas seis.

1.ª *observacion.* Si designamos las tres relaciones

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}; \; \frac{cb}{ab} : \frac{cd}{ad}; \; \frac{ab}{db} : \frac{ac}{dc} \quad (1)$$

con los nombres de 1.ª relacion, 2.ª relacion y 3.ª relacion, la inversa de la ecuacion

$$n = \frac{1}{1-m}\text{ , es decir, } \frac{1}{n} = 1 - m,$$

podrá escribirse de este modo:

$$m = 1 - \frac{1}{n}\text{; ó bien, 1.ª relacion} = 1 - \frac{1}{\text{2.ª relacion.}}$$

Igualmente la inversa de la ecuacion

$$p = \frac{1}{1-n}\text{ , ó bien } \frac{1}{p} = 1 - n$$

se espresará diciendo,

$$n = 1 - \frac{1}{p}\text{ , ó, 2.ª relacion} = 1 - \frac{1}{\text{3.ª relacion.}}$$

Por último, de las ecuaciones

$$n = \frac{1}{1-m} \text{ y } n = 1 - \frac{1}{p}$$

se obtiene, eliminando n

$$\frac{1}{1-m} = 1 - \frac{1}{p};$$

de donde se deduce

$$p = 1 - \frac{1}{m}\text{, ó bien: 3.ª relacion} = 1 - \frac{1}{\text{1.ª relacion.}}$$

Se pasa pues de unas á otras por estas tres sustituciones circulares de los números 1, 2, 3,

1,2;
2,3;
3,1.

Las tres expresiones

$$m = 1 - \frac{1}{n}\ ;\ n = 1 - \frac{1}{p}\ ;\ p = 1 - \frac{1}{m}\ .$$

prueban que una de las cantidades m, n, p será siempre *negativa*, y las otras dos *positivas*.

En efecto: 1.° si n es *positiva* y <1, $\frac{1}{n}$ será >1, y $1 - \frac{1}{n} = m$ será *negativa;* pero siendo m negativa, $1 - \frac{1}{m}$, es decir, p, es positiva, luego

n..........	positiva
m..........	negativa
p..........	positiva.

2.° Si n es positiva y >1, $\frac{1}{n}$ será <1, y positiva; luego m será asimismo positiva, y menor que la unidad, de donde se deduce que $1 - \frac{1}{m}$, es decir p, será negativa: por lo tanto

n..........	positiva
m..........	positiva
p..........	negativa.

3.° Si n es negativa, $m = 1 - \frac{1}{n}$ es positiva y >1, luego $\frac{1}{m} < 1$, y por lo tanto p será positiva. Resulta pues

n.......... negativa
m.......... positiva
p.......... positiva.

Nótese que esta conclusion solo se refiere á las relaciones m, n y p, cuya ley de formacion está perfectamente definida, puesto que corresponden á los tres grupos

$$[a, b \ldots c, d]\ [c, a \ldots b, d]\ [a, d \ldots b, c].$$

Núm. 4. De aquí se deduce, que para determinar un sistema de cuatro puntos bajo el concepto de sus relaciones anarmónicas, *basta una de ellas*, y que todas las demás se deducen de la primera por las fórmulas halladas precedentemente.

Asimismo, si sobre dos rectas XX, $X'X'$ (*fig.* 4), hay distribuidos ocho puntos, cuatro a, b, c, d sobre la primera, y otros cuatro a', b', c', d' sobre la segunda, y si además las dos relaciones anarmónicas

$$\frac{a\,c}{b\,c} : \frac{a\,d}{b\,d} = m \text{ y } \frac{a'\,c'}{b'\,c'} : \frac{a'\,d'}{b'\,d'} = m'$$

son iguales, las cinco restantes lo serán tambien.

En efecto: n y n' se espresan en funcion de m y m' respectivamente, por las mismas fórmulas

$$n = \frac{1}{1-m}\,;\ n' = \frac{1}{1-m'}\,;$$

pero $m = m'$ por hipótesis, luego $n = n'$.

Otro tanto podríamos decir de

$$p,\ p';\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{m'};\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n'};\ \text{y } \frac{1}{p},\ \frac{1}{p'}.$$

Por esta razon, y para abreviar el razonamiento, al hablar en adelante de la relacion anarmónica de cuatro puntos, solo *mencionaremos una de ellas;* y por igual razon diremos que las relaciones anarmónicas de cuatro puntos de un sistema son iguales á las de otro, cuando probemos que *una* del primero es igual á *otra* del segundo.

Sean dos sistemas de cuatro puntos cuyas relaciones anarmónicas son iguales.

En general *se dice que son puntos correspondientes* ó *conjugados* de los dos sistemas, *aquellos cuyas letras entran del mismo modo en las relaciones anarmónicas*. Por ejemplo, en los dos sistemas a, b, c, d, y a', b', c', d', cuyas relaciones anarmónicas son iguales; — es decir, que se tiene,

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'}$$

—son correspondientes los puntos a y a'; b y b'; c y c'; d y d'; pero si fuesen iguales las relaciones

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{c'a'}{d'a'} : \frac{c'b'}{d'b'}$$

los puntos correspondientes serian a y c'; b y d'; c y a'; d y b'.

Claro es que las relaciones anarmónicas iguales, derivadas de las principales, serán las que correspondan á iguales permutaciones de las letras que indican los puntos correspondientes de uno y otro sistema. Por ejemplo, si en los dos sistemas [a, b, c, d] y [m, n, p, q] se tiene

$$\frac{ca}{da} : \frac{cb}{db} = \frac{pm}{qm} : \frac{pn}{qn},$$

se tendrá igualmente

$$\frac{db}{ab} : \frac{dc}{ac} = \frac{qn}{mn} : \frac{qp}{mp}, \text{ etc.}$$

Núm. 5. Para definir la relacion anarmónica hemos dividido el sistema de cuatro puntos en dos grupos [a, b... c, d], por ejemplo, y hemos formado las relaciones $\frac{ac}{bc}$ y $\frac{ad}{bd}$ de las distancias de cada dos puntos del primer grupo á cada uno del segundo; pero tambien podríamos formar las relaciones $\frac{ac}{ad}$ y $\frac{bc}{bd}$ de las distancias de un punto del primer grupo á los dos del segundo.

En efecto $\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}$ puede ponerse bajo la forma $\frac{ca}{da}:\frac{cb}{db}$ puesto que

$$ac = -ca;\ ad = -da;\ bc = -cb;\ bd = -db;$$

y por lo tanto

$$\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd} = \frac{-ca}{-da}:\frac{-cb}{-db} = \frac{ca}{da}:\frac{cb}{db}.$$

Pero esta es la relacion anarmónica de los cuatro puntos *a, b, c, d* divididos en los grupos *c, d... a, b.*

Num. 6. Si los cuatro puntos *a, b, c, d* varian de posicion sobre la recta *XX'* (*fig.* 1) sus distancias respectivas variarán tambien, y por lo tanto variará, en general, el valor de la relacion anarmónica $\frac{ac}{bc}:\frac{ad}{bd}$, y el de todas las restantes que dependen de esta. Pero se comprende que pueden variar los puntos y las distancias de tal modo, es decir, con arreglo á *tal ley*, que se compensen unas con otras, tanto las variaciones de las distancias como las de sus signos, y que el valor de la relacion anarmónica quede invariable.

Así pues, de la misma manera que sobre una recta *XX* (*figura* 5), hay infinitos sistemas de tres puntos *a, b, c,* en los que siendo diferentes *a b, a c, b c,* la relacion sencilla $\frac{ab}{ac}$ es constante é igual para todos, así tambien existen infinitos sistemas de cuatro puntos, cuyas relaciones anarmónicas son iguales.

Esta proposicion, que casi es evidente, puede aún comprenderse mejor observando que basta igualar á una constante m la espresion (1)

$$\frac{y\,(z-x)}{(y-x)\,z}$$

para obtener la ley analítica segun la cual han de variar las distancias de tres de los puntos dados al cuarto, para que la relacion anarmónica no cambie.

Tomando pues el punto a como origen (*fig.* 3), y haciendo variar x, y, z en la ecuacion

$$\frac{y\,(z-x)}{(y-x)\,z}=m,$$

obtendremos sobre la recta XX' infinitos sistemas, que tendrán la misma relacion anarmónica.

La ecuacion anterior es de segundo grado en x, y, z, y puede representarse por una superficie de segundo órden, deduciéndose de aquí las diversas combinaciones de signo de dichas variables, y las diferentes formas ó distribuciones de puntos que puede tener una misma relacion anarmónica. Pero no insistiremos sobre ello, porque mas adelante hemos de hallar otro método mas sencillo para estudiar estas cuestiones.

Núm. 7. Ocurre aquí naturalmente el siguiente

Problema. Dados tres puntos a, b, c sobre una recta XX' (*fig.* 3), hallar otro punto de tal modo que la relacion anarmónica correspondiente á una agrupacion dada [$a, b \ldots c, d$] por ejemplo, tenga un valor m.

Solucion. Tomemos como incógnita la distancia del punto d al a, ó sea $a\,d = z$, y es evidente que bastará para resolver el problema despejar z de la ecuacion

$$\frac{y\,(z-x)}{(y-x)\,z}=m,$$

en la cual todas las cantidades son conocidas menos z.

Resultará pues

$$z=\frac{y\,x}{y-m\,y-m\,x}$$

Y como la ecuacion en z es de primer grado, el problema siempre será posible siquiera sea necesario suponer el punto d en el infinito, cuando $y-m\,y-m\,x=o$.

Núm. 8. Puesto que m puede tener un valor cualquiera en la ecuacion anterior, resulta que las relaciones anarmónicas, como las relaciones sencillas, varian desde $-\infty$ á $+\infty$.

Núm. 9. De la tabla del núm. 1 se deduce, que las cuatro agrupaciones siguientes

1.ª agrupacion..........	$a, b\ldots c, d$
2.ª....................	$b, a\ldots d, c$
3.ª....................	$c, d\ldots a, b$
4.ª....................	$d, c\ldots b. a$

tienen la misma relacion anarmónica m; luego podemos considerar al sistema de los cuatro puntos a, b, c, d, como la superposicion de cuatro sistemas distintos que tienen igual relacion anarmónica.

Fijémonos, por ejemplo, en los dos primeros sistemas:

$$a,\ b\ldots c,\ d,$$
$$b,\ a\ldots d,\ c,$$

y sustituyamos en el segundo á las letras b, a, d, c, las ***correspondientes*** del primero, con un acento; es evidente que debemos poner por b, a'; por a, b'; por d, c'; y por c, d'. De este modo habremos formado (*fig.* 6) el sistema a', b', c', d', cuya relacion anarmónica

$$\frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'}$$

es igual á la correspondiente

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$$

del a, b, c, d. Del mismo modo formaríamos los sistemas a'', b'', c'', d''; a''', b''', c''', d'''.

El sistema primitivo a, b, c, d, segun hemos dicho, es ó puede considerarse, como la superposicion de los cuatro sistemas a, b, c, d; a', b', c', d'; a'', b'', c'', d''; a''', b'''; c''', d'''; idénticos como formas geométricas, distintos como agrupaciones ordenadas de puntos, pero que aun siendo diferentes bajo este último aspecto, tienen la misma relacion anarmónica.

Es claro por lo demás, que todas las agrupaciones que se deduzcan de estos cuatro sistemas por iguales permutaciones de las letras, tendrán la misma relacion anarmónica, puesto que todas ellas se espresarán de la misma manera en funcion de las principales.

Núm. 10. Supongamos dos sistemas, a, b, c, d, y m, n, p, q (*fig.* 6), cuyas relaciones anarmónicas

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} \text{ y } \frac{mp}{np} : \frac{mq}{nq}$$

son iguales, con lo cual queda dicho que a y m, b y n, c y p, d y q son los puntos correspondientes de ambos sistemas.

Ahora bien, el grupo b, a, d, c, tiene la misma relacion anarmónica que a, b, c, d; luego tendrá la misma relacion anarmónica que m, n, p, q; advirtiendo no obstante, que en este caso los puntos correspondientes serán b y m, a y n, d y p, c y q.

Igual consideracion podríamos hacer respecto á los grupos c, d, a, b, y d, c, b, a del número anterior.

En resúmen, cuando dos sistemas a, b, c, d, y m, n, p, q, tienen la misma relacion anarmónica, correspondiéndose los puntos

$$a \text{ con } m,\ b \text{ con } n,\ c \text{ con } p,\ d \text{ con } q,$$

puede aún establecerse la correspondencia de otras tres maneras:

$$b \text{ con } m;\ a \text{ con } n;\ d \text{ con } p;\ c \text{ con } q:$$
$$c \text{ con } m;\ d \text{ con } n;\ a \text{ con } p;\ b \text{ con } q:$$
$$d \text{ con } m;\ c \text{ con } n;\ b \text{ con } p;\ a \text{ con } q:$$

es decir, que el sistema $m,\ n,\ p,\ q$ puede igualarse bajo el punto de vista de la relacion anarmónica á otros cuatro sistemas:

$$a,\ b,\ c,\ d,$$
$$b,\ a,\ d,\ c,$$
$$c,\ d,\ a,\ b,$$
$$d,\ c,\ b,\ a,$$

que son agrupaciones diversas de uno mismo.

II.—*Relaciones anarmónicas de cuatro rectas que pasan por un punto.*

Núm. **11**. *Definicion*. Sean $O\,A,\ O\,B,\ O\,C,\ O\,D$ (*fig.* 7) cuatro rectas concurrentes en un punto O: designaremos este sistema geométrico con el nombre de *haz de cuatro rectas*.

Dividiendo el sistema en dos grupos $O\,A,\ O\,B \ldots . O\,C,\ O\,D$, por ejemplo; formando las relaciones sencillas

$$\frac{\text{sen. } A\,O\,C}{\text{sen. } B\,O\,C},\ \frac{\text{sen. } A\,O\,D}{\text{sen. } B\,O\,D},$$

y despues la relacion compuesta

$$\frac{sen.\ AOC}{sen.\ BOC} : \frac{sen.\ AOD}{sen.\ BOD},$$

daremos á esta última el nombre de relacion *anarmónica* del *haz* $OABCD$.

Para designar un haz nombraremos primero la letra del vértice, y despues las que corresponden á cada una de las rectas concurrentes, por ejemplo $OABCD$.

Nótese que hay una perfecta analogía entre la relacion anarmónica de cuatro puntos y la de cuatro rectas: el sistema de formacion es idéntico, y basta sustituir á los segmentos los senos de los ángulos para pasar de una á otra. Por ejemplo, donde en la relacion anarmónica de cuatro puntos entra el segmento $a\,b$, en la de un haz entrará el seno del ángulo AOB.

En la relacion anarmónica de un haz, los ángulos y por lo tanto sus *senos* llevan el signo que les corresponde, segun el sentido en que se cuentan los ángulos positivos. Asi, en la *figura* 7, contando los ángulos positivos en el sentido que indica la flecha f, se ve desde luego que la relacion anarmónica

$$\frac{sen.\ AOC}{sen.\ BOC} : \frac{sen.\ AOD}{sen.\ BOD}$$

es esencialmente positiva.

Núm. 12. Por consideraciones análogas á las espuestas en el *núm.* 2, probaríamos que de las 24 relaciones que pueden formarse agrupando de distinto modo las cuatro rectas OA, OB, OC, OD, solo *seis* son distintas, y que de estas, *tres son inversas de las otras tres.*

Las relaciones que entre estas tres últimas existen, podrian ser halladas directamente; pero como no es aplicable aquí el método del *núm.* 3, puesto que no se trata de segmentos contados sobre un eje, sino de *senos de ángulos*, habria que acudir á un método de demostracion mas complicado. Creemos preferible reducir desde luego toda la teoría de los *haces* á la de *puntos situados en línea recta*, segun veremos inmediatamente.

Núm. 13. *Teorema fundamental.* Imaginemos un haz $OABCD$ (*fig.* 8), cortado por una secante ó transversal XX. Sean a, b, c, d, los puntos en que dicha transversal corta á las rectas OA, OB, OC, OD.

Nos proponemos demostrar que la relacion anarmónica

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$$

de los cuatro puntos a, b, c, d, es igual á la relacion anarmónica

$$\frac{sen.\ AOC}{sen.\ BOC} : \frac{sen.\ AOD}{sen.\ BOD}$$

del haz, sea cual fuere la posicion XX de la secante.

Dem. Las áreas de los triángulos Oac, Obc, Oad, Obd, pueden espresarse de dos maneras distintas.

1.ª Por el producto de los lados concurrentes en O, por la mitad del seno del ángulo que formen cada dos de dichos lados.

2.ª Por el producto de las bases por la mitad de la altura OP.

Así pues tendremos:

$$\begin{aligned} Oa \times Oc \times sen\ AOC &= ac \times OP \\ Ob \times Oc \times sen\ BOC &= bc \times OP \\ Oa \times Od \times sen\ AOD &= ad \times OP \\ Ob \times Od \times sen\ BOD &= bd \times OP. \end{aligned}$$

Ecuaciones que se verificarán, no solo en cuanto á los valores numéricos sino en cuanto á los signos, si contamos en el mismo sentido los ángulos y los segmentos: por ejemplo *sen* AOC y ac, tendrán el mismo signo, y los dos miembros de la primera ecuacion serán á la vez, ó ambos positivos ó ambos negativos.

Dividiendo la primera *ecuacion* por la *segunda*, la *tercera* por la *cuarta*, y las dos ecuaciones resultantes una por otra, tendremos:

$$\frac{Oa \times Oc \times sen\,A\,O\,C}{Ob \times Oc \times sen\,B\,O\,C} : \frac{Oa \times Od \times sen\,A\,O\,D}{Ob \times Od \times sen\,B\,O\,D} =$$

$$\frac{ac \times OP}{bc \times OP} : \frac{ad \times OP}{bd \times OP};$$

y simplificando:

$$\frac{sen\,A\,O\,C}{sen\,B\,O\,C} : \frac{sen\,A\,O\,C}{sen\,B\,O\,D} = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$$

que es precisamente lo que nos proponíamos demostrar.

Núm. 14. *Consecuencias.* El teorema anterior permite reducir desde luego, segun indicamos, la teoría de las relaciones anarmónicas de los *haces* á la teoría de las relaciones anarmónicas de los segmentos.

Tratemos, por ejemplo, de hallar las relaciones que existen entre las tres relaciones anarmónicas de un haz $OABCD$ (*fig.* 8),

$$\frac{sen\,A\,O\,C}{sen\,B\,O\,C} : \frac{sen\,A\,O\,D}{sen\,B\,O\,D} = M; \quad \frac{sen\,C\,O\,B}{sen\,A\,O\,B} : \frac{sen\,C\,O\,D}{sen\,A\,O\,D} = N;$$

$$\frac{sen\,A\,O\,B}{sen\,D\,O\,B} : \frac{sen\,A\,O\,C}{sen\,D\,O\,C} = P.$$

Cortemos á este fin el haz propuesto por una secante XX. y representando por m, n y p los valores de las tres relaciones anarmónicas

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}; \quad \frac{cb}{ab} : \frac{cd}{ad}; \quad \frac{ab}{db} : \frac{ac}{dc},$$

tendremos, en virtud del teorema precedente,

$$m = M; \quad n = N; \quad p = P;$$

pero entre m, n y p existen (*núm.* 3) las relaciones

$$m = 1 - \frac{1}{n}\ ;\ n = 1 - \frac{1}{p}\ ,\ p = 1 - \frac{1}{m},$$

luego entre las relaciones anarmónicas del haz tendremos tambien las ecuaciones

$$M = 1 - \frac{1}{N}\ ;\ N = 1 - \frac{1}{P}\ ;\ P = 1 - \frac{1}{M}\ ;$$

y por lo tanto, *entre las tres relaciones anarmónicas y principales de un haz, existen las mismas relaciones analíticas que entre las análogas de los segmentos.*

Núm. **15.** Vemos, pues, que para demostrar *cualquier proposicion* relativa á un haz $OABCD$ basta, por regla general, cortar dicho haz por una secante XX, establecer entre las relaciones anarmónicas de los puntos a, b, c, d una relacion analítica análoga á la que nos proponemos probar, y sustituir en esta última por m, n y p sus iguales M, N, P.

Podremos, sin entrar en mas detalles, dar como demostradas las siguientes proporciones.

Núm. **16.** Dadas cuatro rectas concurrentes, OA, OB, OC, OD, queda perfectamente determinada la relacion anarmónica

$$\frac{\operatorname{sen} AOC}{\operatorname{sen} BOC} : \frac{\operatorname{sen} AOD}{\operatorname{sen} BOD} = M\ ;$$

quedan igualmente determinadas las relaciones

$$\frac{\operatorname{sen} COB}{\operatorname{sen} AOB};\ \frac{\operatorname{sen} COD}{\operatorname{sen} AOD} = N;\ \text{y}\ \frac{\operatorname{sen} AOB}{\operatorname{sen} DOB} : \frac{\operatorname{sen} AOC}{\operatorname{sen} DOC} = P,$$

en funcion de la primera, por las fórmulas

$$N = \frac{1}{1 - M}\ ;\ P = 1 - \frac{1}{M}\ :$$

las tres relaciones restantes

$$\frac{\text{sen } BOC}{\text{sen } AOC} : \frac{\text{sen } BOD}{\text{sen } AOD}; \quad \frac{\text{sen } AOB}{\text{sen } COB} : \frac{\text{sen } AOD}{\text{sen } COD}; \text{ y}$$

$$\frac{\text{sen } DOB}{\text{sen } AOB} : \frac{\text{sen } DOC}{\text{sen } AOC}$$

son inversas de las precedentes é iguales á

$$\frac{1}{M}, \frac{1}{N}, \frac{1}{P};$$

y por último, las demás relaciones anarmónicas son iguales á estas seis primeras.

Núm. 17. Representando las relaciones anarmónicas M, N y P por los nombres de: 1.ª relacion; 2.ª relacion; 3.ª relacion, tendremos:

$$1.^{a} \text{ relacion} = 1 - \frac{1}{2.^{a} \text{ relacion}};$$

$$2.^{a} \text{ relacion} = 1 - \frac{1}{3.^{a} \text{ relacion}};$$

$$3.^{a} \text{ relacion} = 1 - \frac{1}{1.^{a} \text{ relacion}};$$

las tres relaciones se sustituyen, pues, por permutaciones circulares.

Núm. 18. Para determinar un haz de cuatro rectas, bajo el punto de vista de sus relaciones anarmónicas, basta *una de ellas*, y todas las demás se deducen de esta por las fórmulas halladas precedentemente.

Núm. 19. De las tres relaciones anarmónicas M, N y P, una será siempre *negativa*, y las otras dos *positivas;* pero nótese que esta conclusion solo se refiere á las relaciones anarmónicas M, N, P, cuya ley de formacion está perfectamente definida, puesto que corresponden á los tres grupos

$$[OA, OB \ldots OC, OD]\ ;\ [OC, OA \ldots OB, OD];\ \text{y}$$
$$[OA, OD \ldots OB, OC].$$

Núm. **20.** Si alrededor de dos puntos O, O' hay dos haces de cuatro rectas $OABCD$, $O'A'B'C'D'$, y si además las dos relaciones anarmónicas

$$\frac{\operatorname{sen} AOC}{\operatorname{sen} BOC} : \frac{\operatorname{sen} AOD}{\operatorname{sen} BOD} = M \text{ y } \frac{\operatorname{sen} A'O'C'}{\operatorname{sen} B'O'C'} : \frac{\operatorname{sen} A'O'D'}{\operatorname{sen} B'O'D'} = M'$$

son iguales, las cinco relaciones anarmónicas restantes tambien serán iguales.

Por esta razon, y para abreviar el razonamiento, al hablar en adelante de la relacion anarmónica de un haz, solo mencionaremos una de sus relaciones anarmónicas, que por otra parte es completamente arbitraria.

Asimismo diremos, que son iguales las *relaciones anarmónicas* de un haz á las de otro, cuando *una* del primero sea igual á *otra* del segundo.

Núm. **21.** Si en dos haces $OABCD$, $O'A'B'C'D'$, se tiene

$$\frac{\operatorname{sen} AOC}{\operatorname{sen} BOC} : \frac{\operatorname{sen} AOD}{\operatorname{sen} BOD} = \frac{\operatorname{sen} A'O'C'}{\operatorname{sen} B'O'C'} : \frac{\operatorname{sen} A'O'D'}{\operatorname{sen} B'O'D'}$$

se dice que las rectas OA y $O'A'$, OB y $O'B'$, OC y $O'C'$, OD y $O'D'$, son rectas correspondientes dos á dos.

Es decir, que son rectas correspondientes de dos haces, cuya relacion anarmónica es la misma, las rectas *cuyas letras* entran del mismo modo en las dos relaciones. Así, si en vez de la ecuacion anterior tuviésemos

$$\frac{\operatorname{sen} AOC}{\operatorname{sen} BOC} : \frac{\operatorname{sen} AOD}{\operatorname{sen} BOD} = \frac{\operatorname{sen} C'O'A'}{\operatorname{sen} D'O'A'} : \frac{\operatorname{sen} C'O'B'}{\operatorname{sen} D'O'B'}$$

las rectas correspondientes serian

$$OA \text{ y } O'C';\ OB \text{ y } O'D';\ OC \text{ y } O'A';\ OD \text{ y } O'B'.$$

Observacion. Debe notarse que el valor de la relacion anarmónica de cuatro rectas no varia porque se sustituyan una ó várias de estas por su prolongacion, siempre que se midan los ángulos segun la regla general establecida precedentemente.

En efecto, sea la relacion (*fig.* 7)

$$\frac{\operatorname{sen} AOC}{\operatorname{sen} BOC} : \frac{\operatorname{sen} AOD}{\operatorname{sen} BOD}:$$

sustituyendo á la recta OB la OB', tendremos

$$\frac{\operatorname{sen} AOC}{\operatorname{sen} B'OC} : \frac{\operatorname{sen} AOD}{\operatorname{sen} B'OD};$$

pero $\operatorname{sen} BOC = -\operatorname{sen} B'OC$, y $\operatorname{sen} BOD = -\operatorname{sen} B'OD$; luego las dos relaciones precedentes son iguales.

Núm. 22. Podemos definir la relacion anarmónica de un haz $OABCD$ formando las relaciones sencillas

$$\frac{\operatorname{sen} AOC}{\operatorname{sen} AOD} \text{ y } \frac{\operatorname{sen} BOC}{\operatorname{sen} BOD},$$

y la relacion compuesta

$$\frac{\operatorname{sen} AOC}{\operatorname{sen} AOD} : \frac{\operatorname{sen} BOC}{\operatorname{sen} BOD},$$

porque esto equivale á formar los grupos $[OC, OD \ldots OA, OB]$.

Núm. 23. Si las cuatro rectas OA, OB, OC, OD, giran alrededor del punto O, los ángulos que forman entre sí variarán, y por lo tanto variará, en general, el valor de la relacion anarmónica

$$\frac{sen\ AOC}{sen\ BOC} : \frac{sen\ AOD}{sen\ BOD},$$

y el de todas las restantes que dependen de esta. Pero se comprende que pueden variar los ángulos de tal modo, que las variaciones de magnitud y de signo se compensen, y el valor de la relacion anarmónica quede invariable.

En efecto, si trazamos la secante XX (*fig.* 9), y hacemos variar los puntos a, b, c, d, de suerte que las relaciones anarmónicas de los sistemas a, b, c, d; a', b', c', d'; a'', b'', c'', d'', etc., sean iguales, lo serán tambien las de los haces $OABCD$, $OA'B'C'D'$, $OA''B''C''D''$, etc., en virtud del teorema fundamental (*núm.* 13).

Núm. 24. *Problema.* Dadas tres rectas concurrentes OA, OB, OC (*fig.* 8), determinar otra OD, tal que la relacion anarmónica del haz $OABCD$ correspondiente á la agrupacion $[OA, OB \ldots OC, OD]$ sea igual á una magnitud conocida M.

Solucion. Tracemos una secante XX (*fig.* 8), y determinemos el punto d de modo que (*núm.* 7)

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = M.$$

Uniendo el punto d al O, OD será la recta buscada.

En efecto:

relacion anar. $(OABCD)$ = relacion anar. (a, b, c, d);

relacion anar. $(a, b, c, d) = M$;

luego relacion anar. $(OABCD) = M$.

Núm. 25. Puesto que M puede tener un valor arbitrario, dedúcese de aquí que la relacion anarmónica de un haz puede variar entre $-\infty$ y $+\infty$.

Núm. 26. Todo haz $OABCD$ puede considerarse como el resultado de la superposicion de cuatro haces que tienen la misma relacion anarmónica, y que si bien como figuras geométricas son iguales, desde que se introduce la idea de órden ó agrupacion ordenada son esencialmente distintos.

El siguiente cuadro indica las rectas correspondientes:

1.^{er} sistema......	*OA*	*OB*	*OC*	*OD*
2.° sistema.......	*OB*	*OA*	*OD*	*OC*
3.^{er} sistema......	*OC*	*OD*	*OA*	*OB*
4.° sistema........	*OD*	*OC*	*OB*	*OA*

Las rectas correspondientes se hallan colocadas en columnas verticales.

La *figura* 10 indica estos cuatro sistemas, pero hemos puesto las mismas letras á las rectas correspondientes.

Núm. 27. Cuando las relaciones anarmónicas de dos haces $OABCD$, $SMNPQ$ (*fig.* 10) son iguales, es decir,

$$\frac{\operatorname{sen} AOC}{\operatorname{sen} BOC} : \frac{\operatorname{sen} AOD}{\operatorname{sen} AOD} = \frac{\operatorname{sen} MOP}{\operatorname{sen} NOP} : \frac{\operatorname{sen} MOQ}{\operatorname{sen} NOQ}$$

puede establecerse la igualdad de otras tres maneras distintas, correspondientes á las várias agrupaciones del haz $OABCD$ que tienen la misma relacion anarmónica.

El sistema $SMNPQ$ tendrá las mismas relaciones anarmónicas que los sistemas

1.^{er} sistema......	$OABCD$		$OABCD$
2.°..............	$OBADC$	ó	$O'A'B'C'D'$
3.°..............	$OCDAB$		$O''A''B''C''D''$
4.°..............	$ODCBA$		$O'''A'''B'''C'''D'''$

Todos los haces $OABCD$, $O'A'B'C'D'$, $O''A''B''C''D''$, $O'''A'''B'''C'''D'''$ son superponibles é iguales como figuras geométricas, pero estableciendo en ellos agrupacion ordenada, son esencialmente distintos, siquiera tengan igual relacion anarmónica.

III.—*Propiedades proyectivas.*

Núm. 28. *Teorema.* Dados dos sistemas de cuatro puntos (*fig.* 11), a, b, c, d, el primero, a', b', c', d', el segundo, sobre dos rectas XX, $X'X'$, en los que se corresponden los puntos a, a'; b, b'; c, c'; d, d'; y tales qué las rectas aa', bb', cc', dd', que unen los puntos homólogos ó correspondientes, concurren en un punto O, la relacion anarmónica del sistema $a\,b\,c\,d$ será igual á la del $a'\,b'\,c'\,d'$. [Es decir, que las seis relaciones anarmónicas del primer sistema serán iguales á las seis del segundo.]

Demostracion. En efecto, representando para abreviar por R_a la frase *relacion anarmónica*, tendremos segun el teorema fundamental:

$$R_a\,[a,\,b,\,c,\,d] = R_a\,[haz\ O\,A\,B\,C\,D],$$

$$\text{y}\ R_a\,[a',\,b',\,c',\,d'] = R_a\,[haz\ O\,A\,B\,C\,D];$$

luego

$$R_a\,[a, b, c, d] = R_a\,[a', b', c', d'];$$

ó bien

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'}.$$

Observacion. El teorema anterior puede tambien enunciarse de este otro modo:

Teorema. Si cortamos un haz de cuatro rectas por dos secantes cualesquiera XX, $X'X'$, las relaciones anarmónicas de los puntos de interseccion serán iguales.

Núm. 29. El teorema siguiente es en cierto modo el recíproco del anterior.

Teorema. Dados sobre dos rectas XX, $X'X'$ (*fig.* 12), dos sistemas, de cuatro puntos cada uno, a, b, c, d el primero, a', b', c', d' el segundo, cuyas relaciones anarmónicas sean iguales, siempre pueden colocarse dichos sistemas sobre un mismo haz. Es decir, de tal modo que las rectas aa', bb', cc', dd', que unen los puntos correspondientes, concurran en un mismo punto O.

Demostracion. Coloquemos las rectas dadas XX, $X'X'$ en cualquier direccion, pero de manera que dos puntos correspondientes a y a', por ejemplo, coincidan, y vamos á demostrar que las rectas bb', cc', dd' concurrirán en un cierto punto O.

En efecto, tracemos las rectas bb', cc', que unen dos pares de puntos correspondientes, y sea O su punto de interseccion: tracemos asimismo las rectas Oa y Od', y vemos desde luego que los puntos a, a', b, b', c, c' se hallan sobre el haz de tres rectas $OABC$: falta probar que la recta Od' pasa por el punto d.

Supongamos que no pase, y sea d_1 el punto en que corte á la secante XX. En virtud del teorema anterior tendremos

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad_1}{bd_1} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'};$$

pero por hipótesis

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'};$$

luego

$$\frac{ad_1}{bd_1} = \frac{ad}{bd}, \text{ ó bien } \frac{ad + dd_1}{bd + dd_1} = \frac{ad}{bd}.$$

Resultado absurdo, porque un quebrado $\frac{ad}{bd}$ distinto de la unidad, varía cuando á numerador y denominador se agrega ó resta una misma cantidad $d d_1$, y absurdo que solo desaparece suponiendo $d d_1 = o$, es decir, cuando los puntos d y d_1 coinciden.

Con lo cual queda probado que los ocho puntos $a, b, c, d, a', b', c', d'$ pueden colocarse sobre un mismo haz $OABCD$.

Observacion. No es absolutamente necesario, para colocar los ocho puntos $a, b, c, d, a', b', c', d'$, sobre un mismo haz, que coincidan dos de los puntos correspondientes; bien al contrario, el problema admite otras infinitas soluciones.

Tomemos en efecto sobre la recta XX (*fig.* 13), un punto arbitrario f, y busquemos sobre la recta $X'X'$ un punto f' tal que los dos sistemas f, b, c, d y f', b', c', d', tengan la misma relacion anarmónica; es decir, que

$$\frac{fc}{bc} : \frac{fd}{bd} = \frac{f'c'}{b'c'} : \frac{f'd'}{b'd'} \quad [\textit{Núm. 7.—Problema.}]$$

Si hacemos coincidir dichos puntos f, f', es evidente, segun el teorema que acabamos de demostrar, que los ocho puntos $f, b, c, d, f', b', c', d'$, se hallarán sobre un haz $OFBCD$; pero uniendo los puntos O y a demostraríamos, siguiendo el método precedente, que la recta Oa pasa por a'; con lo cual queda probado que los puntos $a, b, c, d, a', b', c', d'$ se hallan sobre el haz $OABCD$.

Núm. 30. *Teorema.* La relacion anarmónica de la perspectiva (ó dicho de otro modo de la proyeccion cónica) de cuatro puntos situados sobre una recta, es igual á la relacion anarmónica de dichos cuatro puntos.

Demostracion. Sea O el polo ó punto de vista, y PP' el plano del cuadro (*fig.* 14).

Las proyecciones ó perspectivas a', b', c', d', de los puntos a, b, c, d, se hallarán:

1.° Sobre las rectas Oa, Ob, Oc, Od.

2.° Sobre la recta $X'X'$, interseccion del plano OXX con el plano de proyeccion PP'; luego el sistema $Oabcda'b'c'd'$ no es otra cosa que un haz cortado por dos trasversales, y por lo tanto (*Núm.* 28), tendremos

$$R_a(a, b, c, d) = R_a(a', b', c', d').$$

Observacion. Como el teorema anterior subsiste sea cual fuere la posicion del punto O, resulta que aún se verificará cuando se halle en el infinito, y por lo tanto, para la proyeccion cilíndrica (*fig.* 15).

Núm. 31. *Teorema.* La proyeccion cónica $M'ABCD$ (*figura* 16), sobre un plano PP', de un haz $MABCD$, tiene la misma relacion anarmónica que dicho haz: es decir,

$$\frac{sen\ A\ M\ C}{sen\ B\ M\ C} : \frac{sen\ A\ M\ D}{sen\ B\ M\ D} = \frac{sen\ A\ M'\ C}{sen\ B\ M'\ C} : \frac{sen\ A\ M'\ D}{sen\ B\ M'\ D} :$$

ó abreviadamente

$$R_a[M] = R_a[M']$$

Demostracion. Sean:

O el polo ó punto de vista;

M' la proyeccion del vértice M;

y A, B, C, D las trazas sobre el plano PP' de las cuatro rectas MA, MB, MC, MD.

Es evidente que los cuatro puntos A, B, C, D se hallarán sobre la recta XX, interseccion del plano del haz M y del plano del cuadro PP'; y es evidente asimismo, que uniendo los puntos A, B, C, D al punto M', las rectas $M'A$, $M'B$, $M'C$, $M'D$ serán las proyecciones ó perspectivas de las cuatro rectas MA, MB, MC, MD, del haz M.

Ahora bien

$$R_a[haz\ M] = R_a[A, B, C, D];$$

y

$$R_a[haz\ M'] = R_a[A, B, C, D]; \quad (Núm.\ 28.)$$

luego

$$R_a[haz\ M] = R_a[haz\ M']:$$

que es precisamente lo que nos proponíamos demostrar.

Observacion. Subsistiendo el teorema para todas las posiciones del punto O, subsistirá tambien cuando dicho polo se aleje hasta el infinito en una direccion dada. Así pues, la proyeccion cilíndrica M' de un haz M tiene la misma relacion anarmónica que dicho haz M (*fig.* 17).

Núm. 32. *Teorema.* Si dos haces $OABCD$, $O'A'B'C'D$ (*figura* 18) tienen la misma relacion anarmónica, y dos de sus lados homólogos ó correspondientes OD, OD' coinciden, los puntos de interseccion a, b, c, de los tres pares de lados homólogos restantes OA, $O'A'$; OB, $O'B'$; OC, $O'C'$, están en línea recta.

Dem. En efecto, unamos los puntos b, c por la recta XX, y vamos á demostrar que dicha recta pasa por el punto a.

Supongamos que no pase, y sean a_1, a_1' los puntos en que corte á los lados OA, $O'A'$:

Tendremos,

$$R_a\,[O,\ A,\ B,\ C,\ D] = R_a\,[a_1,\ b,\ c,\ d] \quad \textit{núm.}\ 28.$$

$$R_a\,[O,\ A',\ B',\ C',\ D'] = R_a\,[a'_1,\ b,\ c,\ d] \quad \textit{núm.}\ 28.$$

luego

$$R_a\,[a_1,\ b,\ c,\ d] = R_a\,[a'_1,\ b,\ c,\ d];$$

ó bien

$$\frac{a_1 c}{b\,c} : \frac{a_1 d}{b\,d} = \frac{a'_1 c}{b\,c} : \frac{a'_1 d}{b\,d},$$

de donde se deduce

$$\frac{a_1 c}{a_1 d} = \frac{a'_1 c}{a'_1 d} = \frac{a_1 c + a'_1 a_1}{a_1 d + a'_1 a_1}:$$

absurdo que solo desaparece suponiendo $a'_1\,a_1 = o$, es decir, cuando la recta $X\,X$ pase por el punto a.

Observacion. Este teorema es, en los haces, el equivalente del teorema del núm. 29 en los segmentos; y aun puede generalizarse suponiendo, no que coinciden dos lados homólogos $O\,D$, $O'D'$, sino dos rectas $O\,F$, $O'F'$, tales que las relaciones anarmónicas de los haces $O\,F\,A\,B\,C$, $O'\,F'\,A'\,B'\,C'$ sean iguales.

Núm. 33. *Definicion.* Cuando una propiedad, ya de posicion geométrica, ya de relacion métrica, subsiste en la proyeccion de una figura, se dice que la *relacion de que se trata es proyectiva.*

Dedúcese de esta definicion, y de lo demostrado en los números 30 y 31, que la relacion anarmónica de *cuatro puntos en línea recta*, y la de *un haz*, son *relaciones proyectivas.*

Núm. 34. *Consideraciones generales.* Muchos de los métodos empleados en la moderna geometría se reducen á *uno general*, conocido con el nombre de *transformacion de figuras.*

Trasformar la figura propuesta en otra, en la que sea mas fácil que en aquella determinar ciertas relaciones, y pasar de esta segunda figura auxiliar á la primitiva, es la esencia, por decirlo así, de dicho método.

Uno de los sistemas empleados con este fin es el de la proyeccion cónica: basta en efecto proyectar la figura dada de tal suerte que se simplifique, por decirlo así, su forma; y, estudiada su proyeccion, toda propiedad de esta última que sea proyectiva, será propiedad de la figura propuesta y aun de todas las secciones planas del cono proyectante. Y sin embargo, en *una sola*, y la mas sencilla, y la mas propia para el caso, ha sido demostrada.

Presentemos un ejemplo.

Sabido es que todo cono de segundo grado admite dos sistemas de secciones circulares; pues bien, dada una cónica cualquiera C, en la que se desea estudiar tal ó cual clase de propiedades, considérese dicha cónica como base de un cono, determínese una de las secciones circulares c, estúdiense en el círculo las relaciones equivalentes á las que deseamos estudiar en la cónica, y es claro que todas aquellas que sean proyectivas serán aplicables á la cónica C, como á todas las secciones planas del cono proyectante.

Así habremos reducido el estudio de la *elipse*, de la *parábola* y de la *hipérbola* al estudio del *círculo*.

Queda sin embargo en pie una dificultad: ¿cuáles son las propiedades proyectivas? Cuestion es esta que, planteada en toda su generalidad, no podemos resolver; pero dedúcese de lo espuesto, que las *relaciones anarmónicas* lo son; y hé aquí *una* de las razones en que se funda su *gran* importancia en la moderna geometría.

Toda propiedad, en efecto, que se demuestre para una figura plana, y que analíticamente pueda espresarse en funcion de relaciones anarmónicas, será desde luego proyectiva, y se aplicará, sin nueva demostracion, á todas las transformadas cónicas ó cilíndricas de la figura propuesta.

VI.—*Planos concurrentes.*

Núm. 35. Imaginemos cuatro planos $P_a\, P_b\, P_c\, P_d$ que pasen por una misma recta rr.

Diremos, análogamente á lo espuesto en los números 1 y 11, que la relacion compuesta

$$\frac{sen\ P_a\, P_c}{sen\ P_b\, P_c} : \frac{sen\ P_a\, P_d}{sen\ P_b\, P_d}$$

es la relacion anarmónica de los cuatro planos.

Designamos por $P_c\, P_a$, $P_b\, P_c$..... los ángulos formados por los planos P_a, P_c; P_b, P_c, etc.; y consideraremos dichos ángulos como positivos ó negativos, segun el sentido en que se cuenten.

Núm. 36. Podemos reducir el estudio de las relaciones anarmónicas de cuatro planos, al de las relaciones anarmónicas de *un haz* ó de *cuatro puntos en línea recta*, por los siguientes teoremas.

Teorema. Sea $r\ P_a P_b P_c P_d$ el sistema de cuatro planos concurrentes segun la recta $r\,r$ (*fig.* 19); XX una recta cualquiera; y a, b, c, d los puntos en que dicha recta corta á los planos P_a, P_b, P_c, P_d.

Nos proponemos demostrar que

$$\frac{a\,c}{b\,c} : \frac{a\,d}{b\,d} = \frac{sen\ P_a P_c}{sen\ P_b P_c} : \frac{sen\ P_a P_d}{sen\ P_b P_d},$$

ó bien, abreviadamente

$$R_a\,[a, b, c, d] = R_a\,[P_a\,P_b\,P_c\,P_d]$$

Dem. 1.° Cortemos los cuatro planos P_a, P_b, P_c, P_d por otro $D r A$ perpendicular á la arista rr, y sean rA, rB, rC, rD las intersecciones de este plano con los del sistema propuesto.

2.° Hagamos pasar por XX un plano arbitrario $O\,A\,D$; y sean:

$A\,D$ la interseccion de este plano con el $D\,r\,A$;

O el punto en que corta á la arista rr;

Y $O\,A$, $O\,B$, $O\,C$, $O\,D$ sus intersecciones con los cuatro planos propuestos P_a, P_b, P_c, P_d.

Puesto que los ángulos planos situados en el $A\,r\,D$ son las medidas de los ángulos diedros formados por los planos propuestos, tendremos,

$$R_a\ [P_a, P_b, P_c, P_d] = R_a\ [haz\ r\,A\,B\,C\,D] = R_a\,[A, B, C, D];$$

pero

$$R_a\ [A, B, C, D] = R_a\ [a, b, c, d]$$

puesto que $A\,D$ y XX son dos transversales en el haz $O\,A\,B\,C\,D$; luego

$$R_a\,[P_a, P_b, P_c, P_d] = R\,[a, b, c, d].$$

Que es precisamente lo que nos proponíamos demostrar.

Núm. 37. *Teorema.* Si cortamos el sistema de cuatro planos concurrentes P_a, P_b, P_c, P_d por un plano cualquiera $A\,O\,D$, la relacion anarmónica de dicho sistema de cuatro planos es igual á la del haz $O\,A\,B\,C\,D$ que el plano $A\,O\,D$ determina.

Dem. Trazando en el plano $A\,O\,D$ una transversal arbitraria $X\,X$, tendremos por el teorema anterior,

$$R_a\,[P_a, P_b, P_c, P_d] = R_a\,[a, b, c, d];$$

pero

$$R_a\,[a, b, c, d] = R_a\,[haz\ O\,A\,B\,C\,D]$$

luego

$$R_a\,[P_a, P_b, P_c, P_d] = R_a\,[haz\ O\,A\,B\,C\,D].$$

Núm. 38. Los dos teoremas anteriores permiten reducir toda la teoría de los sistemas de planos concurrentes á la de *haces ó segmentos rectilíneos;* y podríamos establecer teoremas análogos á los de los números I, II, III, etc.

Creemos inútil insistir más sobre este punto.

V.—*Sistemas homográficos.*

Núm. 39. *Definiciones.* Imaginemos dos rectas XX, $X'X'$ (*fig.* 20) indefinidas, y sobre cada una un sistema de puntos: a, b, c..... sobre la primera; a', b', c'..... sobre la segunda; y supongamos además que dichos puntos se corresponden dos á dos, es decir: a y a'; b y b'; c y c'.....

Siempre que en dos sistemas de puntos unamos con el pensamiento, por decirlo así, cada punto de un sistema á otro determinado del segundo, diremos que dichos puntos son *correspondientes* ó *conjugados*. Así a y a'; b y b'; c y c'..... serán puntos *correspondientes* ó *conjugados* de los dos sistemas propuestos.

El número de puntos situados sobre las rectas XX, $X'X'$ puede ser finito ó infinito; pueden además variar dichos puntos de una manera discontínua, de suerte que entre cada dos medie un intervalo finito ab, bc, etc., ó pueden variar por la ley de continuidad.

Por ejemplo: si se determina cada punto del primer sistema por su distancia positiva ó negativa á un origen O; y cada punto del segundo por su distancia, contada sobre la recta $X'X'$, á un origen O'; y si, finalmente, ambas distancias x, x' se expresan en funcion de una misma variable t por las ecuaciones

$$x = f(t), \quad x' = f'(t),$$

de tal suerte que á cada valor de t solo corresponda un valor de x y otro de x', las dos séries de puntos que resulten sobre las rectas XX, $X'X'$ se hallarán comprendidas en el caso de que venimos ocupándonos, y los dos valores x_1, x'_1 correspondientes á un mismo valor t_1 de t determinarán dos puntos conjugados.

En resúmen, el carácter distintivo de los sistemas que vamos á estudiar consiste en que á cada punto del primer sistema, situado sobre la recta XX, corresponde, sin ambigüedad ni duda, otro punto del segundo sistema sobre $X'X'$, y uno solo.

Y recíprocamente, á cada punto del segundo sistema corresponde uno, y solo uno del primero.

Sistemas que cumplen con las condiciones fijadas hasta aquí, hay infinitos, y así se comprende que debe ser mientras no precisemos cuál es la naturaleza de las funciones f y f'; pero entre todos ellos solo estudiaremos los que cumplen con la siguiente condicion, que los define y determina por completo.

Se dice que dos sistemas de puntos $a, b, c \ldots\ldots a', b', c' \ldots\ldots$ *situados sobre dos rectas* XX, $X'X'$ (*fig.* 20) *son homográficos, cuando tomando cuatro puntos arbitrarios del primer sis-*

tema — por ejemplo, b, d, f, a — y los conjugados — b', d', f', a' — del segundo, la relacion anarmónica de los cuatro primeros es siempre igual á la relacion anarmónica de los cuatro últimos: — por ejemplo

$$\frac{bf}{df} : \frac{ba}{da} = \frac{b'f'}{d'f'} : \frac{b'a'}{d'a'}$$

y esto, sean cuales fueren los puntos elegidos.

Núm. **40.** Mas ocurre la duda siguiente: ¿Será tal condicion posible? ¿No se espresan en esta definicion más condiciones de las necesarias? Entre estas varias condiciones ¿no podrá existir incompatibilidad?

Y esta duda es fundada, porque en efecto, supongamos fijos y determinados sobre la recta XX todos los puntos a, b, c, d..... de la primera série, y sobre la recta $X'X'$ solo *tres* de la segunda, por ejemplo a', b', c'. Si expresamos la condicion de que los cuatro puntos a, b, c, d, tengan la misma relacion anarmónica que los tres a', b', c' del segundo sistema, y otro más, d', desconocido hasta ahora y determinado por esta condicion, es evidente (*Núm.* 7) que de la ecuacion

$$\frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'} = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} \text{ ó bien } \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'} = m$$

— representando por m la cantidad conocida

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} —,$$

se podrá deducir la posicion del punto d', y solo una posicion para este punto. Análogamente podremos determinar los puntos e', f', g'..... del segundo sistema por las condiciones

$$\frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'e'}{b'e'} = \frac{ac}{bc} : \frac{ae}{be}; \quad \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'f'}{b'f'} = \frac{ac}{bc} : \frac{af}{bf};$$

$$\frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'g'}{b'g'} = \frac{ac}{bc} : \frac{ag}{bg} \;.....$$

con lo cual queda el segundo sistema de puntos perfectamente determinado. Pero hasta aquí solo hemos expresado una parte de las condiciones de la definicion, á saber: que las relaciones anarmónicas de *tres puntos fijos* del segundo sistema y de *cada uno* de los restantes, son iguales á las de los correspondientes del primer sistema; luego basta con *parte* de las condiciones comprendidas en la definicion, para determinar uno de los sistemas dado el otro; y cabe la duda, segun dijimos, de si el sistema de puntos así definido cumplirá con las condiciones restantes, es decir: si las relaciones anarmónicas de agrupaciones distintas de las empleadas, que son $abcd$, $abce$, $abcf$, $abcg$..... — por ejemplo e, f, g, h — serán iguales en ambos sistemas.

Para desvanecer esta duda probaremos que el sistema de puntos a', b', c', d', e', f'..... determinado por las ecuaciones

$$R_a\,[a, b, c, d] = R_a\,[a', b', c', d'];$$

$$R_a\,[a, b, c, e] = R_a\,[a', b', c', e'];$$

$$R_a\,[a, b, c, f] = R_a\,[a', b', c', f']\ldots\ldots$$

cumple con todas las condiciones de la homografía, es decir, que en general se tiene

$$R_a\,[e, f, g, h] = R_a\,[e', f', g', h']$$

sean cuales fueren los puntos e, f, g, h de la agrupacion que se considere.

Dem. Coloquemos las rectas aX, $a'X'$ (*fig.* 21) de modo que coincidan los puntos correspondientes a, a', y unamos tambien los puntos conjugados b, b'; c, c'; d, d', etc., dos á dos: todas las rectas bb', cc', dd'..... pasarán por un mismo punto O.

En efecto, por ser iguales las relaciones anarmónicas de a, b, c, d y de a', b', c', d', las rectas bb', cc', dd' pasarán por un punto O (*Núm.* 29): del mismo modo, toda vez que los sistemas a; b, c, e, y a', b', c', e' tienen igual relacion anarmónica, la recta ee' pasará por el punto de interseccion O de las bb', cc'; y otro tanto probaríamos para las rectas ff', gg'.....

Ahora bien, puesto que los ocho puntos e, f, g, h; e', f', g', h', están sobre un haz $O\,E\,F\,G\,H$, resulta finalmente

$$R_a\,[e,\,f,\,g,\,h] = R_a\,[e',\,f',\,g',\,h']$$

y esto, sean cuales fueren los puntos ó agrupaciones que se elijan.

Dedúcese pues que los sistemas homográficos son posibles, y aun se ve por lo dicho la manera de construir tantos sistemas homográficos como se quiera.

Núm. **41.** De la misma manera que en *Geometría elemental* definen algunos autores los triángulos semejantes diciendo, que son los que tienen *sus lados proporcionales y sus ángulos iguales*, siendo así que una de estas condiciones es consecuencia de la otra, hemos dicho, siguiendo el uso establecido, que dos sistemas de puntos, distribuidos sobre dos rectas y conjugados dos á dos, son homográficos, cuando la relacion anarmónica de cuatro puntos del primer sistema es igual á la de los correspondientes del segundo; con lo cual expresamos más condiciones que las necesarias para definir el sistema, pero no expresamos, y esto es lo importante, condiciones incompatibles.

Núm. **42.** Dos sistemas homográficos pueden estar situados sobre rectas distintas, ó bien pueden coincidir en una sola, ambas rectas, y en tal caso tendremos sobre una misma línea recta dos sistemas de puntos conjugados y homográficos.

Es evidente en este último caso, puesto que toda relacion anarmónica es proyectiva, que si trasformamos cónica ó cilíndricamente dicha recta con todos los puntos que contiene, las proyecciones de los dos sistemas constituirán dos grupos homográficos distribuidos sobre una misma recta.

En general, las proyecciones cónicas ó cilíndricas de dos sistemas homográficos situados de cualquier modo en el espacio, son tambien sistemas homográficos.

En efecto, sean m, n, p, q cuatro puntos del primer sistema y m', n', p', q' los conjugados del segundo: tendremos por hipótesis

$$R_a [m, n, p, q] = R_a [m', n', p', q'];$$

pero si designamos por μ, ν, π, $\varkappa$; μ', ν', π', $\varkappa'$ las perspectivas ó proyecciones de m, n, p, q; m', n', p', q', tendremos (*Núm.* 30).

$$R_a [m, n, p, q] = R_a [\mu, \nu, \pi, \varkappa],$$

$$\text{y} \quad R_a [m', n', p', q'] = R_a [\mu', \nu', \pi', \varkappa']$$

luego

$$R_a [\mu, \nu, \pi, \varkappa] = R_a [\mu', \nu', \pi', \varkappa'];$$

y como m, n, p, q son puntos cualesquiera, resulta que la relacion anarmónica de cuatro puntos arbitrarios de la proyeccion del primer sistema, es igual á la de las proyecciones de los conjugados del segundo, con lo cual se demuestra la homografía de las dos proyecciones.

Núm. 43. Continuando en la hipótesis de los sistemas homográficos establecidos sobre una misma recta XX, es evidente que si dichos sistemas son contínuos (*Núm.* 39), es decir, si están formados por infinitos puntos distribuidos sobre la recta XX (*fig.* 22) por la ley de continuidad, todo punto $[a, b']$ *es doble;* lo cual significa que se puede considerar *ya como formando parte del primer sistema, ya como siendo uno de los puntos del segundo:* pero adviértase que estos dos puntos superpuestos no serán en general conjugados; bien al contrario, al punto a del primer sistema corresponderá otro cierto punto a' del segundo, y al mismo punto a, ó mejor dicho, al punto b' del segundo sistema, corresponderá otro, tal como el b, del primero.

Hay casos en que los puntos conjugados de dos puntos a y b' que coinciden, coinciden tambien, es decir, en que a' y b se reunen en uno solo (*fig.* 22 bis), y entonces se dice que los puntos conjugados son recíprocos.

Si esto se verifica para todos los puntos de la recta XX, ó lo que es igual, si los dos sistemas de puntos están agrupados por pares de puntos recíprocos, el sistema, como veremos más adelante, se dice que está en *involucion*.

Núm. **44.** Fácil es expresar analíticamente la ley que enlaza dos sistemas homográficos distribuidos sobre la misma recta XX (*fig.* 23).

Sean: O..... el origen de la abscisa variable que fija la posicion de cada punto sobre la recta XX;

a, b, c..... *tres* puntos arbitrarios del primer sistema;

$Oa = a;\ Ob = b;\ Oc = c$..... las abscisas de dichos tres puntos;

por último a', b', c'

y $Oa' = a';\ Ob' = b';\ Oc' = c'$..... los puntos del segundo sistema conjugados con los a, b, c, del primero, y sus abscisas respectivas.

Supongamos que un punto x del primer sistema recorre la recta XX, y tratemos de expresar en funcion de su abscisa, que tambien la designaremos por la letra x, la x' del punto conjugado del segundo sistema.

En una palabra, tratamos de hallar una relacion entre [illegible] abscisas x y x' de dos puntos conjugados cualesquiera.

Que esta relacion debe existir es evidente, porque á cada punto x corresponde uno x', y por lo tanto á cada abscisa [illegible] corresponderá otra x'; ó dicho de otro modo, deberemos [illegible]

$$x' = f(x).$$

Resta pues únicamente determinar la naturaleza [illegible] funcion.

Puesto que los sistemas son homográficos, la relacion anarmónica de a, b, c, x será la misma que la de sus puntos conjugados a', b', c', x': tendremos pues:

$$\frac{a\,b}{a\,c} : \frac{x\,b}{x\,c} = \frac{a'\,b'}{a'\,c'} : \frac{x'\,b'}{x'\,c'};$$

y sustituyendo, á fin de referir todas las distancias al origen O,

$$a\,b = b - a; \quad a\,c = c - a; \quad x\,b = b - x; \quad x\,c = c - x;$$

$$a'\,b' = b' - a'; \quad a'\,c' = c' - a'.....$$

resultará

$$\frac{b-a}{c-a} : \frac{b-x}{c-x} = \frac{b'-a'}{c'-a'} : \frac{b'-x'}{c'-x'};$$

de donde se deduce

$$\frac{(b-a)\,c - (b-a)\,x}{(c-a)\,b - (c-a)\,x} = \frac{(b'-a')\,c' - (b'-a')\,x'}{(c'-a')\,b' - (c'-a')\,x'},$$

y suponiendo para simplificar

$$(b-a)\,c = m; \quad (b-a) = n; \quad (c-a)\,b = p; \quad c - a = q;$$

$$(b'-a')\,c' = m'; \text{ etc.}$$

$$\frac{m - n\,x}{p - q\,x} = \frac{m' - n'\,x'}{p' - q'\,x'}.$$

Por último, quitando denominadores y simplificando

$$(m\,p' - m'\,p) + (m'\,q - n\,p')\,x + (n'\,p - m\,q')\,x' +$$

$$(n\,q' - n'\,q)\,x\,x' = o$$

ó sustituyendo los coeficientes por las letras A, B.....

$$A + B\,x + C\,x' + D\,x\,x' = o.$$

Tal es una de las expresiones más sencillas de la homografía de dos sistemas de puntos determinados por sus abscisas x y x'.

De esta ecuacion se deduce

$$x' = -\frac{A + Bx}{C + Dx}; \text{ ó bien } x = -\frac{A + Cx'}{B + Dx'}:$$

expresiones que demuestran que á cada valor de x solo corresponde otro de x', y recíprocamente. Los puntos definidos por la ecuacion anterior son, como debian ser, conjugados dos á dos.

Núm. **45.** Dos sistemas homográficos situados sobre una recta XX están definidos, segun lo dicho, por la relacion

$$A + Bx + Cx' + Dxx' = o,$$

y esto, ya sean los puntos en número *finito*, ya en número infinito, pero discontínuos, ya varien por la ley de continuidad, sin más diferencias entre estos varios casos, que las siguientes: en el *primero*, x tomará un número *finito* de valores perfectamente determinados, en el *segundo* este número será *infinito*, y en el *tercero*, x podrá tomar cualquier valor.

Pero la relacion precedente no solo es propia para definir los sistemas homográficos, sino que todos los sistemas determinados por relaciones de este género lo son necesariamente. De aquí se deduce esta

Proposicion recíproca. Dando valores á x, por ejemplo, en la ecuacion

$$A + Bx + Cx' + Dxx' = o,$$

y determinando los correspondientes de x', las dos séries de puntos $a, b, c\ldots\ldots a', b', c'\ldots\ldots$ determinados por estos diversos valores de x y x', constituyen dos sistemas homográficos.

En efecto, puede demostrarse fácilmente, que fijando cuatro puntos arbitrarios por cuatro valores de x, y hallando por la fórmula

$$A + Bx + Cx' + Dxx' = o,$$

los correspondientes de x' y los puntos que determinan, las relaciones anarmónicas de ambos grupos son iguales; que es precisamente la definicion que hemos dado de la homografía.

Sean a, b, c, d los cuatro valores de x: los correspondientes de x' serán

$$-\frac{A+Ba}{C+Da}; \quad -\frac{A+Bb}{C+Db}; \quad -\frac{A+Bc}{C+Dc}; \quad -\frac{A+Bd}{C+Dd};$$

y las relaciones anarmónicas de los grupos a, b, c, d y a', b', c', d' tomarán la forma,

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b};$$

$$\frac{-\frac{A+Bc}{C+Dc}+\frac{A+Ba}{C+Da}}{-\frac{A+Bc}{C+Dc}+\frac{A+Bb}{C+Db}} : \frac{-\frac{A+Bd}{C+Dd}+\frac{A+Ba}{C+Da}}{-\frac{A+Bd}{C+Dd}+\frac{A+Bb}{C+Db}};$$

pero esta última se reduce simplificando á

$$\frac{(BC-AD)a+(AD-BC)c}{(BC-AD)b+(AD-BC)c} : \frac{(BC-AD)a+(AD-BC)d}{(BC-AD)b+(AD-BC)d} =$$

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$$

que es precisamente la relacion anarmónica de los puntos a, b, c, d; luego

$$R_a\,[a, b, c, d] = R_a\,[a', b', c', d'].$$

Núm. 46. Pudieran proponerse respecto á sistemas homográficos, problemas análogos á los que en Analítica se resuelven respecto á la línea recta, etc.

Dada en efecto la forma general de la relacion homográfica

$$A + Bx + Cx' + Dxx' = o,$$

en la que A, B, C y D son las *constantes* ó *parámetros* que caracterizan cada *sistema particular*, y x, x' las variables, nada más fácil que determinar dichas constantes A, B, C, D con ciertas condiciones; por ejemplo, sujetando los sistemas homográficos buscados á comprender ciertos pares de puntos conjugados a, a'; b, b', etc., ó dicho abreviadamente, *á pasar* por los pares de puntos a, a'; b, b', etc.

Supongamos, para fijar las ideas, que se trata de determinar un sistema homográfico, de modo que á los puntos a, b, c, cuyas abscisas representaremos por las mismas letras a, b, c, correspondan como conjugados los puntos a', b', c', cuyas abscisas serán análogamente a', b', c'.

Puesto que las abscisas a y a', b y b', c y c' determinan pares de puntos conjugados, deberán simultáneamente satisfacer á la ecuacion

$$A + Bx + Cx' + Dxx' = o,$$

sustituidos que sean por x y x'. Tendremos pues entre las constantes desconocidas A, B, C, D las ecuaciones de condicion

$$A + Ba + Ca' + Daa' = o$$
$$A + Bb + Cb' + Dbb' = o$$
$$A + Bc + Cc' + Dcc' = o$$

que darán los valores de

$$\frac{A}{D}; \ \frac{B}{D} \ \text{y} \ \frac{C}{D}.$$

Deberemos sustituir estos valores en la ecuacion general

$$\frac{A}{D}+\frac{B}{D}x+\frac{C}{D}x'+xx'=o.$$

Fácil sería, aunque inútil por su sencillez, multiplicar estos ejemplos.

Núm. 47. Continuando las analogías entre la Geometría Analítica y las relaciones homográficas, del mismo modo que allí se cambia de ejes, podríamos proponernos aquí cambiar de origen, lo cual introduciría una constante arbitraria, de cuya indeterminacion nos serviríamos en algunos casos para simplificar la forma general, etc.

Núm. 48. Despejando de la ecuacion general

$$A+Bx+Cx'+Dxx'=o$$

el valor de x tendremos

$$x=-\frac{A+Cx'}{B+Dx'}=-\frac{\frac{A}{x'}+C}{\frac{B}{x'}+D}.$$

Si en esta ecuacion crece x' positiva ó negativamente, es decir, si un punto del segundo sistema se aleja sin límites en una ú otra direccion de la recta XX, el valor de x tenderá constantemente á $-\frac{C}{D}$: este valor, que representaremos por

$$I \text{ [de modo que } I=-\frac{C}{D}\text{]}$$

determina un punto i, que será el conjugado en el primer sistema, del punto del segundo que se halla en el infinito.

Aánlogamente, despejando x' tendremos

$$x' = -\frac{A + Bx}{C + Dx} = -\frac{\frac{A}{x} + B}{\frac{C}{x} + D},$$

y si hacemos crecer x hasta $x = \infty$, x' tenderá constantemente hácia el límite $-\frac{B}{D}$, que representaremos por J',

$$\left[\text{de modo que } J' = -\frac{B}{D}\right]$$

Este valor J' de x' determina un punto j' del segundo sistema, conjugado con el punto del primer sistema situado en el infinito.

Finalmente, podríamos eliminar de la ecuacion general

$$A + Bx + Cx' + Dxx' = o$$

dos de las constantes — B y C, por ejemplo, — en funcion de los nuevos parámetros I y J'. La ecuacion tomaría la forma

$$\frac{A}{D} - J'x - Ix' + xx' = o$$

ó representado $\frac{A}{D}$ por la letra A,

$$A - J'x - Ix' + xx' = o.$$

Núm. 49. Hemos dicho que los sistemas homográficos situados en una recta única XX, se componen de dos séries de puntos a, a'; b, b'..... correspondientes ó conjugados dos á dos; y hemos dicho tambien que, en general, á un punto a de la recta XX, como punto del primer sistema, corresponde otro a' del segundo sistema. Ahora bien, ¿existirán puntos tales que al determinar sus conjugados resulten ser ellos mismos?

O de otro modo: ¿habrá puntos conjugados que coincidan?

Si existen tales puntos, que para abreviar llamaremos *dobles*, los valores correspondientes de x, x' serán iguales, y representándolos por x_0 tendremos la ecuacion de condicion

$$A - J'x_0 - Ix_0 + x_0 x_0 = o, \text{ ó bien } A - x_0[I + J'] + x_0^2 = o.$$

Despejando x_0 resultará,

$$x_0 = \frac{I+J'}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I+J'}{2}\right)^2 - A}$$

Existirán, pues, *dos* puntos dobles distintos; *uno*, resultado de la superposicion de otros dos; ó *ninguno*, segun que

$$\left(\frac{I+J'}{2}\right)^2 - A \quad \text{sea} \quad \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} O.$$

Núm. 50. En el caso particular en que se verifique $B=o$, $C=o$, la fórmula general se convierte en $A+Dxx'=o$, que, como veremos más adelante, expresa un sistema en *involucion*.

Núm. 51. *Observacion importante.* Siempre que sobre una recta XX se hallen distribuidos dos sistemas de puntos $a, b, c \ldots\ldots a', b', c' \ldots\ldots$ correspondiéndose sin ambigüedad ni duda dos á dos, es decir, a y a', b y b', c y $c' \ldots\ldots$, es claro que dado uno a' por su abscisa x', la abscisa x del conjugado a solo tendrá un valor, y recíprocamente; y si además la relacion analítica entre ambas abscisas ha de ser algebráica, deberá ser de primer grado en x y x' separadamente, y por lo tanto de la forma

$$A + Bx + Cx' + Dxx' = o;$$

con lo cual queda probado directa, y por decirlo así intuitivamente, que ambos grupos son homográficos.

Ejemplo. Sean S, S', S''..... una série de cónicas circunscritas á un cuadrilátero $ABCD$, y por el punto A tracemos una trasversal arbitraria AL, que encontrará á las cónicas sucesivas en una série de puntos a, a', a''..... Cada uno de estos puntos con los cuatro vértices A, B, C, D del cuadrilátero, determina evidentemente la cónica á que corresponde.

Tracemos una segunda trasversal AL', que cortará á dichas cónicas en los puntos b, b' b''.....

Los puntos de esta segunda série corresponden uno á uno á los de la primera; luego estas dos séries son homográficas.

VI.—*Haces homográficos.*

Núm. 52. ***Definicion.*** Consideremos dos haces $OABC$... $O'A'B'C'$... (*fig.* 25), formados, ya de un número finito de rectas, ya de un número infinito, pero mediando de una á otra ángulos finitos, ya por último de un número infinito y distribuidas de una manera contínua. Admitamos además que á cada recta del 1.° corresponde, sin ambigüedad de ningun género, otra del 2.°; por ejemplo

á OA, $O'A'$; á OB, $O'B'$; etc.

Dos haces de está clase se dice que son homográficos, cuando las relaciones anarmónicas de todos los grupos de cuatro rectas que pueden formarse en el primer haz, son iguales respectivamente á las de los grupos correspondientes del segundo.

Por ejemplo

$$R_a[OMNPQ] = R_a[O'M'N'P'Q'],$$

sean cuales fueren las rectas OM, ON, OP, OQ.

Núm. 53. Aquí, como en el número 40, pueden ocurrir dudas sobre la exactitud de esta definicion; pero estas dudas fácilmente se desvanecen, ya por un procedimiento sencillo y directo, ya refiriendo la teoría de los haces homográficos á la de los sistemas homográficos en línea recta.

Siguiendo este último procedimiento, fácilmente se demuestra la existencia de los haces homográficos.

En efecto, sean $a, b, c \ldots a', b', c' \ldots$ dos sistemas homográficos distribuidos sobre las rectas XX, $X'X'$: tomemos dos puntos cualesquiera O y O', y unamos el punto O á los $a, b, c \ldots$, y el punto O' á los $a', b', c' \ldots$ Los haces $OABCD \ldots$ $O'A'B'C'D' \ldots$ así formados, serán homográficos.

Sean OM, ON, OP, OQ cuatro rectas cualesquiera del primer haz; $O'M'$, $O'N'$, $O'P'$, $O'Q'$ las correspondientes del segundo; y $m, n, p, q; m', n', p', q'$, los puntos en que cortan, las cuatro primeras á la secante XX, las cuatro segundas á la $X'X'$. Puesto que los sistemas $a, b, c \ldots a' b' c' \ldots$ son homográficos, tendremos

$$R_a(m, n, p, q) = R_a(m', n', p', q')$$

pero se sabe (*Núm.* 13) que

$$R_a(m, n, p, q) = R_a(O\ M\ N\ P\ Q)$$

$$\text{y}\ R_a(m', n', p', q') = R_a(O'\ M'\ N'\ P'\ Q')$$

luego

$$R_a[OMNPQ] = R_a[O'\ M'\ N'\ P'\ Q'].$$

Las condiciones de la definicion son por lo tanto posibles, aunque dichas condiciones no esten reducidas á su menor número, y algunas de ellas sean consecuencia de las otras.

Núm. 54. Si trasladamos el haz $O'A'B' \ldots$ (*fig.* 25), de suerte que su centro O' coincida con el O del haz homográfico $OABC \ldots$, tendremos alrededor del punto O un sistema de rectas constituyendo dos grupos ó haces cuyas rectas se corresponderán dos á dos: es decir, la recta $O\,A$ con la $O\,A'$; la $O\,B$ con la $O\,B'$; la $O\,C$ con la $O\,C'$, etc.

Si además las rectas $O\,A$, $O\,B$... $O\,A'$, $O\,B'$... están distribuidas de una manera contínua, de suerte, por decirlo así, que se superpongan, una línea cualquiera $O\,A$ (*fig.* 26) será doble, y estará formada por la superposicion de dos rectas $O\,A$, $O\,B'$: una correspondiente al primer sistema, otra al segundo. Considerada como perteneciendo al primer grupo, su conjugada será una cierta línea $O\,A'$ del segundo; considerada por el contrario, como formando parte del segundo grupo, su conjugada será, por ejemplo, la línea $O\,B$, distinta en general de la $O\,A'$.

Solo en casos particulares coinciden las conjugadas $O\,B$, $O\,A'$ de dos rectas coincidentes $O\,A$, $O\,B'$. Si esto se verifica en todo el sistema y para todos los pares de rectas correspondientes, entonces se dice que el sistema está en *involucion*.

Núm. 55. Puesto que la relacion anarmónica de la proyeccion de un haz es igual á la del haz mismo (*Núm.* 31), resulta de aquí que las proyecciones cónicas ó cilíndricas de dos haces homográficos situados en un mismo plano, y que tienen un centro comun, son tambien haces homográficos. Este teorema se generaliza sin dificultad para el caso en que los haces ocupan posiciones cualesquiera.

Núm. 56. *Teorema.* Si en dos haces homográficos, O, O' (*fig.* 27), coinciden dos rectas conjugadas $O\,A$, $O'\,A'$, los puntos de interseccion b, c, d,... de las rectas conjugadas $O\,B$, $O'\,B'$; $O\,C$, $O'\,C'$; $O\,D$, $O'\,D'$, ... están en línea recta.

Dem. Sea $X\,X$ la recta que pasa por dos de estos puntos de interseccion, — b y c, por ejemplo, — es fácil probar que otro punto cualquiera, tal como e, se halla sobre la misma recta.

En efecto, los haces $O\,A\,B\,C\,E$ y $O'\,A'\,B'\,C'\,E'$ tienen la misma relacion anarmónica y los lados correspondientes coinciden, luego (*Núm.* 32) los puntos b, c y e están en línea recta.

Del mismo modo se probaría que otro punto cualquiera, interseccion de rectas conjugadas, se halla sobre la recta $X\,X$.

Observacion. De lo dicho resulta, que si á partir de la posicion OA, $O'A'$ giran dos rectas alrededor de los puntos O y O', de tal modo que engendran haces homográficos, su punto de interseccion engendrará la recta XX.

Núm. 57. *Expresion analítica de la homografía de dos haces.* Al tratar de la homografía de dos sistemas situados sobre una recta, hemos visto que refiriendo á un origen comun los puntos correspondientes, la relacion entre las abscisas variables de estos puntos era de la forma

$$A + Bx + Cx' + Dxx' = o.$$

De este modo teníamos definida analíticamente la homografía de dos sistemas, y podíamos deducir muchas de sus propiedades con suma facilidad.

Veamos si existe alguna relacion análoga para los haces homográficos cuyos vértices coinciden; pero ante todo precisemos las ideas.

Sea S el vértice comun de los dos haces, y SO una recta fija que consideraremos como origen de los ángulos. Si representamos por α el que forma una recta cualquiera SA del primer haz con el eje SO, y por α' el que forma la conjugada SA' en el segundo haz, es evidente que determinado el ángulo α, y por lo tanto la recta SA, quedará determinada la SA' y por consecuencia el ángulo α'; es decir, que α' es funcion de α; ó de otro modo, que α y α' deben estar enlazados por una relacion

$$f(\alpha, \alpha') = o.$$

Esta relacion es precisamente la que nos proponemos determinar.

Para ello cortemos los dos haces por una secante XX, que determinará dos sistemas de puntos, a..... el primero, a'..... el segundo, en relacion homográfica. Tomemos el punto o por origen, y representemos las variables oa, oa' por x y x'.

Entre x y x' existirá la relacion

$$A + Bx + Cx' + Dxx' = o \quad (1).$$

Pero en los triángulos Soa y $S\,oa'$ tenemos

$$\frac{o\,a}{So} = \frac{sen\ oSa}{sen\ S\,a\,o}\,;\ \frac{o\,a'}{S\,o} = \frac{sen\ o\,S\,a'}{sen\ S\,a'\,o}\,;$$

ó bien, haciendo $S\,o = L$, ángulo $S\,o\,a = l$, y observando que

$$S\,a\,o = \pi - \alpha - l, \text{ y } S\,a'\,o = \pi - \alpha' - l,$$

$$\frac{x}{L} = \frac{sen\ \alpha}{sen\ (\alpha + l)}\ ;\ \frac{x'}{L} = \frac{sen\ \alpha'}{sen\ (\alpha' + l)}\ ;$$

de donde se deduce

$$x = L\,\frac{sen\ \alpha}{sen\ \alpha\ cos\ l + cos\ \alpha\ sen\ l}\,;$$

$$x' = L\ \frac{sen\ \alpha'}{sen\ \alpha'\ cos\ l + cos\ \alpha'\ sen\ l}\,;$$

y finalmente

$$x = \frac{L}{cos\ l}\ \frac{tg\ \alpha}{tg\,\alpha + tg\,l}\ ;\ x' = \frac{L}{cos\ l}\ \frac{tg\ \alpha'}{tg\,\alpha' + tg\,l}\,.$$

Sustituyendo por x y x' en la relacion (1) los valores precedentes, hallaremos

$$A + B\,\frac{L}{cos\ l}\ \frac{tg\ \alpha}{tg\ \alpha + tg\ l} + C\,\frac{L}{cos\ l}\ \frac{tg\ \alpha'}{tg\ \alpha' + tg\ l} +$$

$$D\,\frac{L^2}{cos^2 l}\ \frac{tg\ \alpha\ tg\ \alpha'}{tg\ \alpha\ tg\ \alpha' + tg\ l\ (tg\ \alpha + tg\ \alpha') + tg^2\ l} = o$$

que es la relacion buscada entre α y α'.

Pero esta relacion puede simplificarse y reducirse á la forma

$$A\, tg^2 l + tg\, l \left(A + B \frac{L}{\cos l}\right) tg\, \alpha + tg\, l \left(A + C \frac{L}{\cos l}\right) tg\, \alpha'$$

$$+ \left(A + B \frac{L}{\cos l} + C \frac{L}{\cos l} + D \frac{L^2}{\cos^2 l}\right) tg\, \alpha\, tg\, \alpha' = o,$$

ó sustituyendo los coeficientes por M, N, P, Q,

$$M + N\, tg\, \alpha + P\, tg\, \alpha' + Q\, tg\, \alpha\, tg\, \alpha' = o \quad (2),$$

relacion en un todo semejante á la que expresa la homografía de dos sistemas de puntos.

Núm. 58. Facilmente podríamos deducir de la ecuacion (2), resultados análogos á los que hemos consignado en los números 46, 47, 48, 49, 50; pero no nos detendremos más sobre este punto, por no esceder los límites puramente elementales en que deseamos encerrar este trabajo.

VII.—*Sistemas homográficos de planos concurrentes.*

Núm. 59. Los desarrollos que hemos dado á los párrafos anteriores, y los teoremas establecidos en el párrafo IV, nos permiten consignar desde luego, sin más ámplios detalles y sin demostracion, los siguientes resultados.

1.° Dos sistemas de planos concurrentes son homográficos, cuando la relacion anarmónica de cuatro planos cualesquiera del primer sistema es igual á la de los correspondientes del segundo.

2.° Si los dos sistemas de planos concurrentes tienen una arista comun, la interseccion de este sistema complejo por una secante, determina sobre esta última dos sistemas homográficos de puntos.

3.° En la misma hipótesis, la interseccion de ambos sistemas por un plano, dá origen á dos haces homográficos.

4.° La expresion analítica de la homografía de dos sistemas de planos concurrentes cuyas aristas coinciden es de la forma

$$M + N\,tg\,\alpha + P\,tg\,\alpha' + Q\,tg\,\alpha\,tg\,\alpha' = o,$$

en la que α y α' son los ángulos diedros que con un plano fijo forman dos planos conjugados, y M, N, P, Q las constantes que caracterizan cada sistema homográfico.

5.° De la relacion precedente se deduce la determinacion de los planos dobles, y por ella se resuelven problemas análogos á los ya expuestos en los sistemas homográficos de puntos, y en los haces.

VIII.—*Relacion armónica.*

Núm. 60. La *relacion armónica*, ya estudiada en la Geometría elemental, es un caso particular de la relacion anarmónica. Supongamos en efecto cuatro puntos a, b, c, d (*figura* 29), tales que se verifique entre ellos

$$\frac{a\,c}{b\,c} = \frac{a\,d}{b\,d};$$

es decir, que la relacion de las distancias del punto c á los a y b sea igual á la de las distancias del punto d á los mismos puntos a y b: esta es la condicion que expresa que la recta $a\,b$ queda dividida por los puntos c y d en relacion armónica; advirtiendo que en dicha ecuacion se consideran las cuatro distancias $c\,a$, $c\,b$, $d\,a$, $d\,b$, como siendo esencialmente positivas.

Si, por el contrario, damos signos á estos segmentos, segun el sentido en que se cuenten, y consideramos como positiva la direccion que indica la flecha *f*, *a c*, *a d* y *b d* serán positivas, y *b c* negativa; de suerte, que para que la ecuacion anterior se verifique en toda su generalidad algebráica, es decir, en cuanto á signos y valores numéricos, deberemos poner esplícitamente el signo *ménos* á uno de los miembros. Resultará pues

$$\frac{a\,c}{b\,c} = -\frac{a\,d}{b\,d} \text{ ó bien } \frac{a\,c}{b\,c} : \frac{a\,d}{b\,d} = -1.$$

Así pues, la *relacion armónica* es un caso particular de la *relacion anarmónica*, á saber, aquel en que dicha relacion anarmónica tiene el valor -1.

Núm. 61. Todos los teoremas demostrados para la relacion anarmónica subsisten para la relacion armónica. Citemos algunos de ellos.

1.° Uniendo un punto *O* (*fig.* 30) á los cuatro puntos *a, b, c, d* de un sistema armónico, tendremos

$$\frac{sen.\ AOC}{sen.\ BOC} : \frac{sen.\ AOD}{sen.\ BOD} = \frac{a\,c}{b\,c} : \frac{ad}{bd} = -1.$$

2.° Una secante cualquiera $a'\,d'$ cortará al haz $OABCD$ en cuatro puntos a', b', c', d' en relacion armónica, y por lo tanto

$$\frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'} = -1.$$

3.° Las proyecciones cónicas ó cilíndricas de cuatro puntos en relacion armónica, son cuatro puntos armónicamente distribuidos.

4.° La proyeccion de todo haz armónico es otro haz tambien armónico.

5.° Las tres relaciones principales

$$\frac{a\,c}{b\,c} : \frac{a\,d}{b\,d} = m\,; \quad \frac{c\,b}{a\,b} : \frac{c\,d}{a\,d} = n\,; \quad \frac{a\,b}{d\,b} : \frac{a\,c}{d\,c} = p,$$

tienen, en el caso particular de la relacion armónica, los valores siguientes:

$$\frac{a\,c}{b\,c}:\frac{a\,d}{b\,d}=-1\,;\;\frac{c\,b}{a\,b}:\frac{c\,d}{a\,d}=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\,;$$

$$\frac{a\,b}{d\,b}:\frac{a\,c}{d\,c}=1-\frac{1}{-1}=2\,.$$

Las tres inversas serán respectivamente iguales á

$$-1;\;2;\;y\;\frac{1}{2}\,.$$

Núm. 62. Conviene recordar aquí un teorema de la geometría elemental que tiene gran importancia en la teoría de las relaciones armónicas.

Teorema. Dado un triángulo $a\,O\,b$ (*fig.* 31), si se trazan las bisectrices $O\,c$, $O\,d$ de los ángulos suplementarios $a\,O\,b$, $b\,O\,a'$, los segmentos $c\,a$, $c\,b$, $d\,a$, $d\,b$, considerados como esencialmente positivos, están en proporcion, de suerte que tendrémos

$$\frac{c\,a}{c\,b}=\frac{d\,a}{d\,b}.$$

Expresion que trasformada, y dando signo á los segmentos, se convierte en

$$\frac{a\,c}{b\,c}:\frac{a\,d}{b\,d}=-1.$$

Los cuatro puntos a, b, c, d, están, pues, en relacion armónica.

Núm. 63. De la proporcion ordinaria de la Geometría elemental

$$\frac{c\,a}{c\,b}=\frac{d\,a}{d\,b},$$

se deduce la siguiente

$$\frac{b\,c}{b\,d}=\frac{a\,c}{a\,d};$$

considerando en una y en otra á los cuatro segmentos como cantidades esencialmente positivas.

La segunda nos prueba que el segmento $c\,d$ queda dividido armónicamente por los puntos a y b, del mismo modo que $a\,b$ quedaba dividido armónicamente por los puntos c y d.

Dando signos á los segmentos de la segunda relacion, resulta

$$\frac{c\,a}{d\,a}:\frac{c\,b}{d\,b}=-1.$$

Los puntos a y b, así como los c y d, se dice que son *conjugados* dos á dos: es decir, a conjugado de b, y recíprocamente; c conjugado de d, y este del anterior.

Núm. 64. Si el punto d se aleja indefinidamente hácia la derecha, de suerte que las magnitudes $d\,a$ y $d\,b$ crezcan sin límites, la relacion sencilla $\frac{ad}{bd}$ tenderá hácia la *unidad*, y la relacion armónica

$$\frac{a\,c}{b\,c}:\frac{a\,d}{b\,d}=-1$$

hácia el límite

$$\frac{a\,c}{b\,c}=-1$$

de donde se deduce $a\,c=-b\,c$.

Así pues, á medida que el punto d se aleja, el c se aproxima al punto medio o del segmento $a\,b$; ó de otro modo, *el punto conjugado del que está situado en el infinito, es el punto medio o del segmento a b.*

Los puntos a, b, o y el situado en el *infinito,* forman un grupo armónico.

Núm. 65. Veamos ahora cómo varian los puntos c y d (*figura* 32), y el punto medio α del segmento $c\,d$, cuando se mueven dichos puntos c y d sobre la recta $X'X$, de tal modo que dividen constantemente en relacion armónica al segmento *invariable* $a\,b$.

Para ello trasformemos la relacion armónica

$$\frac{a\,c}{b\,c} : \frac{a\,d}{b\,d} = -1,$$

de suerte que no entren mas que las tres distancias

$$a\,c = x\,;\; a\,b = y\,;\; a\,d = z\,:$$

resultará

$$\frac{x}{x-y} : \frac{z}{z-y} = -1\,;$$

ó despejando x en funcion de z

$$x = \frac{-y}{\frac{y}{z} - 2} \qquad (1).$$

En la ecuacion precedente y es una constante, y tenemos por lo tanto espresada x en funcion de z: todo queda reducido á hacer variar de posicion al punto d, con lo cual variará la abscisa z, y á determinar los valores sucesivos que resulten para x, y por consiguiente para el punto c.

La abscisa del punto α, medio del segmento $c\,d$, — abscisa que representaremos por la misma letra α, — será

$$\alpha = \frac{x+z}{2},$$

ó sustituyendo por x el valor precedente

$$\alpha = \frac{-z}{\frac{y}{z} - 2} \qquad (2).$$

Esta ecuacion nos expresa por lo tanto la abscisa α en funcion de z.

Discusion. 1.° Si suponemos que el punto d coincide con el punto fijo b, tendremos $a\,d = z = y$, y las ecuaciones (1) y (2) dan

$$x = \frac{-y}{1-2} = y\,;\ \alpha = \frac{-y}{1-2} = y.$$

Luego cuando el punto d coincide con b, el conjugado c y el punto medio α coinciden tambien con dicho punto b.

2.° Si d camina hácia la derecha, $ad = z$ será positiva y mayor que y; luego $\frac{y}{z}$ será una fraccion propia; $\frac{y}{z} - 2$ será negativa; x y α positivas; y por lo tanto los puntos c y α estarán á la derecha del origen a. Pero de la fórmula (1) se deduce que x estará comprendido entre $\frac{y}{2}$ é y, y que por consiguiente el punto c tomará todas las posiciones imaginables, c, c', etc., entre b y o. Por el contrario, la fórmula (2) demuestra que α es constantemente mayor que y. En efecto, la desigualdad

$$\frac{-z}{\frac{y}{z} - 2} > y,$$

en la que se supone $z>y$, conduce á la série de desigualdades:

$$-z<y\left(\frac{y}{z}-2\right)$$

puesto que $\frac{y}{z}-2$ es negativo;

$$-z^2<y^2-2yz;$$

$$o<y^2-2yz+z^2;$$

y por último

$$o<(y-z)^2$$

desigualdad evidente.

Recíprocamente, de esta última se deduce

$$\frac{-z}{\frac{y}{z}-2}>y.$$

3.° Si $ad=z=\infty$, las fórmulas (1) y (2) se convierten en

$$x=\frac{y}{2};\ \alpha=\infty;$$

así el punto medio o de $a\,b$, es el conjugado del infinito, y el punto α se traslada al infinito al mismo tiempo que d. En resúmen, *mientras el punto c va de b á o, los puntos d y α van de b al infinito.*

4.° Si z es negativa, en cuyo caso el punto d pasará á la izquierda de a, el valor de x será positivo y menor que $\frac{y}{2}$;

lo que demuestra que el punto c estará entre a y o; el valor de α será por el contrario negativo.

5:° Por último, cuando $z=o$, resultará $x=o$, $\alpha=o$; luego si el punto d llega á a, el centro α y el conjugado c llegan al mismo punto a.

En resúmen, *mientras el punto d recorre el segmento infinito X' a, el centro α recorre el mismo segmento, y el punto conjugado c va de o á a.*

Puede decirse que los segmentos $o\,b$ y $b\,\infty$; $o\,a$ y $-\infty\,a$ son conjugados dos á dos, porque son los que contienen á la vez cada par de puntos conjugados.

Núm. 66. Resulta de lo dicho, que los segmentos $a\,b$ y $c\,d$ en parte se superponen $(c\,b)$; en parte, por decirlo así, rebosan $[b\,d$ y $a\,c]$.

Núm. 67. *Nota.* La relacion armónica es conocida desde la mas remota antigüedad: Apolonio de Pergeo hace frecuente uso de ella en su tratado sobre las cónicas; pero en esta obra no aparece la denominacion de *armónica:* esta se emplea por primera vez en los libros de Pappus.

Es digno de notarse que las longitudes de las tres cuerdas que dan el acorde *do*, *mi*, *sol*, son entre sí como los números

$$1,\ \frac{4}{5},\ \frac{2}{3},$$

los que satisfacen á la relacion

$$\frac{m-n}{n-p}=\frac{m}{p}$$

como se ve desde luego haciendo

$$m=1;\ n=\frac{4}{5};\ p=\frac{2}{3}$$

Esta última expresa en el fondo la relacion armónica tal como la hemos definido: en efecto, de la relacion

$$\frac{bd}{bc}=\frac{ad}{ac} \text{ se deduce } \frac{ad-ab}{ab-ac}=\frac{ad}{ac}\,.$$

IX.—*Puntos en involucion.*

Núm. 67. ***Definicion.*** Imaginemos sobre una recta XX un sistema de puntos $a, b, c\ldots\ldots a', b', c'\ldots\ldots$ ya en número finito y *par*, pero cuando ménos igual á 6; ya en número infinito, y distribuidos de una manera discontínua; ya, por último, variando por la ley de continuidad. Supongamos además que dichos puntos se corresponden dos á dos recíprocamente: es decir, al punto a el a', y recíprocamente al a' el punto a, al punto b el b' y al b' el b, etc.: el sistema queda de este modo dividido en *pares* ó *grupos binarios* de puntos recíprocamente conjugados.

Un sistema de esta clase se dice que está en involucion, cuando cuatro puntos cualesquiera de la série $a, b, c\ldots\ldots a', b', c'\ldots\ldots$ tienen la misma relacion anarmónica que los cuatro puntos conjugados.

Por ejemplo:

$$1.^\circ \quad R_a\,(d, e, a, f) = R_a\,(d', e', a', f')$$

$$2.^\circ \quad R_a\,(d, e, a', f') = R_a\,(d', e', a, f)$$

$$3.^\circ \quad R_a\,(d, e', a', f') = R_a\,(d', e, a, f)$$

$$4.^\circ \quad R_a\,(a, a', b, d') = R_a\,(a', a, b', d)$$

Núm. 68. Veamos ante todo si este sistema es posible.

Varios métodos podemos seguir para ello: escojeremos el que conceptuamos más sencillo.

Imaginemos (*fig.* 22) sobre la recta XX dos sistemas *homográficos*, compuestos, ya de un número finito de puntos, ya de puntos discontínuos y en número infinito, ya finalmente distribuidos por la ley de continuidad.

Supongamos que coinciden dos puntos a y b' de ambos sistemas, advirtiendo que esta coincidencia, que es hipotética si los puntos se hallan distribuidos de una manera discontínua, se verificará forzosamente si los sistemas son contínuos, porque en este último caso todo punto es necesariamente *doble* (*Núm.* 43.)

Ahora bien, si determinando: 1.° el punto a' del segundo sistema conjugado del a que pertenece al primero; 2.° el punto b del primero conjugado del b' perteneciente al segundo; ambos puntos a' y b coinciden, los dos puntos únicos que resulten $(a\,b')$, $(a'\,b)$ (*fig.* 22 *bis*) serán conjugados recíprocos.

Y si de este modo se agrupan dos á dos todos los puntos de ambos sistemas homográficos, el sistema que resulte cumplirá con las condiciones de la involucion, puesto que la relacion anarmónica de cuatro puntos cualesquiera, deberá ser igual á la de sus conjugados. Además quedará demostrado de esta manera, que todo sistema en involucion no es otra cosa que la exacta superposicion de dos sistemas homográficos.

Resta probar que pueden existir sobre la recta XX sistemas homográficos del género que indica la *fig.* 22 *bis;* y para ello, que si $x=a$, $x'=a'$ (*fig.* 33) satisfacen á la condicion de la homografía,

$$A+Bx+Cx'+Dxx'=o,$$

$x=a'$, $x'=a$ satisfarán tambien á dicha ecuacion, sean cuales fueren a y a'. En efecto, las ecuaciones $x=a$, $x'=a'$ determinan los puntos a y a', como perteneciendo a al primer sistema y a' al segundo; y por el contrario, $x=a'$, $x'=a$ determinan, a' como punto del primer sistema, y a como punto del segundo; es decir, que en a coinciden dos puntos, uno de cada sistema, y en a' los conjugados de dichos dos puntos.

Tendremos pues

$$A+Ba+Ca'+Daa'=o;$$

$$A+Ba'+Ca+Daa'=o,$$

y restando

$$B(a-a')+C(a'-a)=o,$$

ó bien

$$(B-C)(a-a')=o.$$

Para que esta condicion se verifique independientemente de a y a', es necesario que se tenga

$$B=C. \qquad (1)$$

Recíprocamente, si se verifica la condicion (1), cada dos puntos de un sistema coincidirán en órden inverso con el par de puntos conjugados del otro; ó de otra manera,

$$x=a,\ x'=a';\ \text{y}\ x=a'\ x'=a$$

satisfarán á la ecuacion general de la homografía.

En efecto, esta ecuacion se convierte en

$$A+B(x+x')+Dxx'=o,$$

ecuacion simétrica en x y x'; y ya se suponga $x=a$, $x'=a'$, ya $x=a'$, $x'=a$, siempre tendremos

$$A+B(a+a')+Daa'=o.$$

En resúmen:

1.° Siempre pueden concebirse sobre una recta XX, dos sistemas homográficos tales que, dividiendo uno de ellos en grupos dobles de puntos, grupos que no son arbitrarios, cada dos de estos coincidan recíprocamente con los conjugados del otro sistema.

2.° Los sistemas en involucion son siempre posibles.

3.° La expresion general de la involucion es

$$A+B(x+x')+Dxx'=o.$$

Núm. 69. *Observacion.* Los valores

$$I = -\frac{C}{D},\ J' = -\frac{B}{D}\ \text{(Núm. 48)},$$

que determinan el punto i del primer sistema conjugado con el infinito en el segundo, y el punto j' del segundo sistema conjugado con el infinito en el primero, son en la hipótesis $C = B$ iguales entre sí, y determinan un solo punto doble, que considerado como perteneciendo al primer sistema, es conjugado con el infinito del segundo, y recíprocamente.

En resúmen, los puntos i y j' coinciden en la involucion.

Núm. 70. Veamos si puede simplificarse la ecuacion

$$A + B(x + x') + Dxx' = o$$

por un cambio de origen.

Sustituyamos á este fin

$$x = x_1 + a\ ;\ x' = x'_1 + a,$$

siendo x_1 y x'_1 las nuevas abscisas de los puntos conjugados, y a una indeterminada, abscisa del nuevo origen.

Resultará

$$A + B(x_1 + x'_1 + 2a) + D(ax_1 + ax'_1 + a^2 + x_1 x'_1) = o,$$

ó bien

$$A + B.2a + Da^2 + (B + Da)(x_1 + x'_1) + Dx_1 x'_1 = o.$$

Puesto que a es una cantidad indeterminada, podremos escribir

$$B + Da = o\ ;$$

de donde resulta

$$a = -\frac{B}{D}.$$

La ecuacion general, sustituyendo para simplificar

$$A_1 = A + 2Ba + Da^2$$

se convierte en

$$A_1 + D x_1 x'_1 = o,$$

ó suprimiendo subacentos

$$A + D x x' = o.$$

De aquí resulta, que trasladando el origen al *punto doble* conjugado con el infinito, tanto del segundo como del primer sistema, la ecuacion general se reduce á la forma sencilla

$$A + D x x' = o.$$

Núm. 71. Fácil es probar directamente que los puntos determinados por la relacion anterior satisfacen á las condiciones que nos han servido para definir la involucion.

En efecto:

I. A cada valor $x = a$, — valor que determina sobre la recta XX (*fig.* 33) un punto a, — corresponde otro valor

$$x' = -\frac{A}{Da} = a',$$

que determina á su vez un punto a' sobre dicha recta XX; pero recíprocamente, cuando x tome el valor a', el valor de x' será

$$x' = -\frac{A}{Da'} = a,$$

luego al punto a' corresponde el punto a, y por lo tanto los puntos a y a' son recíprocamente conjugados.

II. La relacion anarmónica de cuatro puntos cualesquiera es igual á la de sus conjugados.

Examinemos como ejercicio, y aunque en rigor es inútil, algunos de los casos que pueden presentarse.

1.° Que formen el primer grupo cuatro puntos del primer sistema, correspondientes á cuatro valores de x

$$x=a\,;\ x=b\,;\ x=c\,;\ x=d,$$

y el segundo los cuatro puntos conjugados que corresponderán á los valores

$$x'=-\frac{A}{D\,a}\,;\ x'=-\frac{A}{D\,b}\,;\ x'=-\frac{A}{D\,c}\,;\ x'=-\frac{A}{D\,d}.$$

La relacion anarmónica del primer grupo será (*Núm.* 3)

$$\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}$$

y la del segundo

$$\frac{-\frac{A}{D\,c}+\frac{A}{D\,a}}{-\frac{A}{D\,c}+\frac{A}{D\,b}}:\frac{-\frac{A}{D\,d}+\frac{A}{D\,a}}{-\frac{A}{D\,d}+\frac{A}{D\,b}}=$$

$$\frac{\frac{c-a}{c\,a}}{\frac{c-b}{c\,b}}:\frac{\frac{d-a}{d\,a}}{\frac{d-b}{d\,b}}=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}$$

luego la relacion anarmónica del segundo grupo será igual á la del primero.

2.° Que formen el primer grupo tres puntos del primer sistema correspondientes á los valores $x=a$, $x=b$, $x=c$, y otro del segundo correspondiente al valor $x=d'$: el segundo grupo estará formado por los puntos conjugados determinados por las abscisas

$$x' = -\frac{A}{Da}; \; x' = -\frac{A}{Db}; \; x' = -\frac{A}{Dc}, \text{ y por } x' = -\frac{A}{Dd'}.$$

Las relaciones anarmónicas de ambos grupos serán

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d'-a}{d'-b}, \text{ y}$$

$$\frac{-\frac{A}{Dc}+\frac{A}{Da}}{-\frac{A}{Dc}+\frac{A}{Db}} : \frac{-\frac{A}{Dd'}+\frac{A}{Da}}{-\frac{A}{Dd'}+\frac{A}{Db}} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d'-a}{d'-b}$$

evidentemente iguales.

3.° Primer grupo:

$$x = a; \; x = b; \; x = c'; \; x = d';$$

segundo grupo:

$$x' = -\frac{A}{Da}; \; x' = -\frac{A}{Db}; \; x' = -\frac{A}{Dc'}; \; x' = -\frac{A}{Dd'};$$

relacion anarmónica del primer grupo

$$\frac{c'-a}{c'-b} \; \frac{d'-a}{d'-b};$$

relacion anarmónica del segundo grupo

$$\frac{-\frac{A}{Dc'}+\frac{A}{Da}}{-\frac{A}{Dc'}+\frac{A}{Db}} : \frac{-\frac{A}{Dd'}+\frac{A}{Da}}{-\frac{A}{Dd'}+\frac{A}{Db}} = \frac{c'-a}{c'-b} : \frac{d'-a}{d'-b}$$

que es igual á la anterior

4.ª Primer grupo:

$$x=a;\ x=a';\ x=c;\ x=d;$$

segundo grupo:

$$x'=-\frac{A}{Da};\ x'=-\frac{A}{Da'};\ x'=-\frac{A}{Dc};\ x'=-\frac{A}{Dd};$$

relacion anarmónica del primer grupo

$$\frac{c-a}{c-a'}:\frac{d-a}{d-a'};$$

relacion anarmónica del segundo grupo

$$\frac{-\frac{A}{Dc}+\frac{A}{Da}}{-\frac{A}{Dc}+\frac{A}{Da'}}:\frac{-\frac{A}{Dd}+\frac{A}{Da}}{-\frac{A}{Dd}+\frac{A}{Da'}}=\frac{c-a}{c-a'}:\frac{d-a}{d-a'}.$$

y del mismo modo comprobaríamos todos los demás casos que pudieran presentarse.

Núm. 72. *Observacion importante.* Nótese que hay una diferencia radical entre el caso de la homografía y el de la involucion.

En aquel, los puntos distribuidos sobre la recta XX forman dos séries: 1.ª a, b, c... 2.ª a', b', c'...; y cada grupo cuya relacion anarmónica se determine para igualarla á la del grupo formado por los puntos conjugados, deberá estar compuesto de puntos pertenecientes á una misma série, por ejemplo, a, b, c, d; ó d, e, f, a, etc.; asi como en el grupo conjugado solo deberán entrar puntos de la segunda série, por ejemplo, a', b', c', d'; d', e', f', a', etc. Nunca segun esto podrán compararse dos grupos como los siguientes.

$$R_a\,(a, b, e', c')=R_a\,(a', b', e, c).$$

En la involucion sucede lo contrario: la limitacion desapa rece, y en cada grupo pueden entrar á la vez puntos de uno y otro sistema, por ejemplo,

$$R_a\,(a,\, e',\, c,\, d') = R_a\,(a',\, e,\, c',\, d).$$

La razon de esta diferencia se comprende sin dificultad, aun considerando á la involucion como caso particular de la homografía: las dos séries, 1.ª a, b, c... 2.ª a', b', c'... no indican en la involucion puntos de uno ú otro sistema homográfico, sino de ambos á la vez. Cada punto es doble; en él están al mismo tiempo un punto del primer sistema y otro del segundo, y así, por ejemplo, las cuatro letras a, e', c, d' de un grupo, indican puntos de un mismo sistema, á pesar de tener unas letras acento y otras no.

En una palabra, la notacion que hemos adoptado en la involucion, es esencialmente distinta de la que hemos establecido para la homografía. En esta, los *acentos* sirven para distinguir los puntos de un sistema de los del otro; en la involucion, dos letras iguales, una con acento, otra sin él, sirven para agrupar dos puntos conjugados dentro de cada sistema.

Núm. 73. En adelante, demostrada ya la posibilidad de los sistemas en involucion, nos atendremos únicamente á la definicion del *Núm*. 67.

Núm. 74. Hemos demostrado ya:

1.° Que la expresion analítica mas sencilla de la involucion es

$$x\,x' = -\frac{A}{D},$$

en la que $-\frac{A}{D}$ es una constante: representándola por m tendremos

$$x\,x' = m.$$

2.° Que el *origen* de abscisas en este caso es un punto conjugado con el infinito: y en efecto, si hacemos

$$x = \pm\infty$$

tendremos

$$x' = \frac{m}{\pm \infty} = o;$$

y del mismo modo, si sustituimos

$$x' = \pm \infty$$

tendremos

$$x = \frac{m}{\pm \infty} = o.$$

Este punto recibe el nombre de *centro de la involucion.*

Núm. 75. De la ecuacion $x x' = m$ se deduce el siguiente

Teorema. El producto de las distancias del centro de la involucion á dos puntos conjugados cualesquiera es constante.

En efecto, x y x' son estas distancias, y su producto es igual á la constante m.

Es decir, que si I (*fig.* 34) es el centro de la involucion, y

$$[a, a'] ; [b, b'] ; [c, c'] \ldots$$

pares de puntos conjugados, tendremos

$$I a \times I a' = I b \times I b' = I c \times I c' = I d \times I d' = \ldots = m.$$

Núm. 76. Esta propiedad es característica de los sistemas en involucion: es decir, que siempre que tengamos un sistema de puntos $a, b, c \ldots . . a', b', c' \ldots . .$ en número par, y formando pares ó grupos conjugados $a, a'; b, b'; c, c' \ldots . .$ en que los productos de las distancias de un punto fijo I á cada dos correspondientes sean iguales á una constante m, el sistema estará en involucion.

En efecto, la traduccion analítica de la propiedad precedente es la ecuacion $x x' = m$, que, como hemos visto, expresa la involucion de los puntos determinados por las variables x y x'.

Núm. 77. *Discusion de la ecuacion* $xx' = m$. Dos hipótesis podemos hacer respecto á la constante m.

Primera hipótesis. $m > o$. Sea XX_1 (*fig.* 35) el eje, é I el centro de la involucion.

Para el valor $x = o$ obtendremos

$$x' = \frac{m}{o} = +\infty;$$

luego el punto I y el X (situado en el infinito) son conjugados entre sí, como ya hemos demostrado.

Si x crece *positivamente* tomando los valores Ia, Ib, Ic ...., x tomará los valores tambien *positivos*

$$Ia' = \frac{m}{Ia}; \; Ib' = \frac{m}{Ib}; \; Ic' = \frac{m}{Ic} \dots\dots$$

tanto menores cuanto mayores sean los de x.

Es decir, que á medida que el punto a se aleja de I caminando hácia la derecha, el punto conjugado a' viene desde el infinito aproximándose á I.

De aquí se deduce ya:

1.° Que los segmentos aa', bb', cc' ..... formados por cada dos puntos conjugados, están unos comprendidos completamente en los otros.

2.° Que cada par de puntos conjugados está á la derecha del polo I.

Creciendo x llegará un caso en que el valor de x' sea igual al de x, los dos puntos se reunirán en uno solo D, que será un punto doble.

El valor ID se obtendrá poniendo $x = x'$ en la ecuacion general; y tendremos

$$ID^2 = m; \text{ ó bien } ID = +\sqrt{m}.$$

Si la variable x continúa creciendo, pasará por todos los valores Ic', Ib', Ia' ..... IX por donde pasó x', y á cada valor de estos corresponderán los

$$\frac{m}{Ic'} = Ic\,;\ \frac{m}{Ib'} = Ib\,;\ \frac{m}{Ia'} = Ia\,;\ \frac{m}{IX} = o.$$

Esto comprueba la correspondencia recíproca de los puntos a, a'; b, b'; c, c'; etc.

En resúmen: si imaginamos que parten dos móviles, uno de I caminando hácia la derecha, otro del infinito caminando hácia la izquierda, y determinando siempre posiciones conjugadas, ambos móviles se aproximarán constantemente, llegarán á confundirse en D, en cuyo punto se cruzarán, siguiendo el que viene del infinito hasta I, y el que partió de I hasta el infinito.

Si hacemos variar x desde cero hasta $-\infty$ obtendremos del mismo modo que á la derecha del centro I:

1.° Pares de puntos conjugados

$$I, -\infty\,;\ a_1,\ a'_1\,;\ b_1,\ b'_1\,;\ c_1,\ c'_1 \ldots\ldots$$

2.° D_1 será otro punto doble, determinado por el valor

$$I\,D_1 = -\sqrt{m}.$$

3.° A medida que x determine c'_1, b'_1, a'_1 ...., x' obtendrá los valores correspondientes á c_1, b_1, a_1 .....

Vemos pues que la involucion es idéntica á un lado y otro del centro I, es decir, que I es un verdadero centro de figura.

Segunda hipótesis. $m < o$. Pongamos en evidencia el signo *ménos:* la ecuacion tomará la forma $x x' = -n^2$, siendo $-n^2$ una cantidad esencialmente negativa.

A cada valor de x (*fig.* 36) corresponderá otro dado por la expresion

$$x' = -\frac{n^2}{x}.$$

Haciendo $x=o$ tendremos

$$x'=-\frac{n^2}{o}=-\infty$$

luego el infinito es conjugado del centro I.

Si x crece positivamente, x' disminuye en valor numérico conservando valores negativos: de este modo obtendremos como puntos conjugados I, X_1 (suponemos X_1 en el infinito); a, a'; b, b'; c, c'..... d, d'; e, e'....., situados los correspondientes á x á la derecha de I, los conjugados á la izquierda; y por último, á $x=+\infty$ corresponde $x'=o$: es decir, que I y X son puntos conjugados.

Obsérvese que los segmentos aa', bb', cc'..... en parte se recubren y en parte rebosan.

Cuando, por el contrario, x tome valores negativos

$$-\infty, -Ia', -Ib', -Ic', -Id', -Ie',$$

determinando los puntos X_1, a', b', c', d'..... e', I, pasará x' por los valores Ia, Ib, Ic, Id, Ie.....: es decir, que los puntos a y a'; b y b'..... son conjugados recíprocos.

En resúmen, si dos móviles parten, el uno de I, el otro del infinito negativo, y caminan ambos hácia la derecha, pasando á la vez por cada par de puntos conjugados, á medida que el uno se aleje de I se aproximará el otro á dicho punto; y si el primero salta desde X á $-X_1$ y continua marchando, el segundo seguirá su marcha desde I hácia la derecha.

En el primer caso ($m>o$) los móviles corrian uno al encuentro del otro; en este caso ($m<o$) marchan en el mismo sentido, cerrando el círculo por el infinito.

El centro I divide en esta hipótesis ($m<o$) á la recta XX_1 en dos segmentos infinitos, y *nunca* dos puntos conjugados se hallan sobre un mismo segmento: lo contrario sucede cuando $m>o$, puesto que en dicha hipótesis cada par de puntos conjugados están á un mismo lado del centro.

Finalmente, si hacemos $x=x'$, tendremos

$$x=\sqrt{-n^2}$$

valor imaginario.

No hay pues puntos dobles.

Núm. 78. Resulta de lo expuesto en el número anterior, que los sistemas en involucion, que consideramos, solo pueden afectar una de las dos formas que indican las *figs.* 35 *y* 36.

Núm. 79. *Ejemplos.* Presentaremos, para aclarar lo que precede, dos ejemplos de sistemas en involucion, correspondientes á cada una de las dos *formas* de dichos sistemas geométricos.

Primer ejemplo. Consideremos una série de círculos en número indeterminado, $aABa'$, $bABb'$, $cABc'$..... (*fig.* 37), que pasen por dos puntos fijos A, B; y cortemos este sistema por una recta XX.

Es fácil probar:

1.° Que los puntos a, a'; b, b'; c, c'..... constituyen un sistema en involucion.

2.° Que cada dos puntos conjugados resultan de la interseccion de un mismo círculo con la recta XX.

3.° Que prolongando la cuerda AB hasta que corte á XX, el punto de interseccion I será el centro de la involucion.

4.° Que trazando dos círculos ABD, ABD_1 que pasen por los puntos fijos A, B, y sean tangentes á la secante XX, los puntos de contacto D y D_1, serán los puntos dobles.

En efecto, por una propiedad de geometría se sabe que,

$$Ia \times Ia' = IA \times IB;\ Ib \times Ib' = IA \times IB;$$
$$Ic \times Ic' = IA \times IB.....;$$

luego

$$Ia \times Ia' = Ib \times Ib' = Ic \times Ic' = ...\ = IA \times IB =$$

constante.

Lo cual prueba (*Núm.* 74) que el sistema $a, b, c.....$ c', b', a' está en involucion; que a, a'; b, b'; c, c'..... son pares de puntos conjugados; y finalmente, que I es el centro de la involucion.

Cuando el círculo variable llegue á una de las dos posiciones ABD, ABD_1, los puntos conjugados se habrán reunido en uno solo, D ó D_1, y serán por lo tanto los puntos dobles del sistema.

Esta involucion es la espresada por la *fig.* 35, y corresponde al caso $m > o$.

Segundo ejemplo. Imaginemos una série de circunferencias $AaBa'$, $AbBb'$, $AcBc'$, $AdBd'$..... pasando por dos puntos A, B, y sea XX la línea de los centros.

Puesto que la ordenada de una circunferencia es media proporcional entre los dos segmentos del diámetro, resultará

$$IA^2 = Ia \times Ia'; \; IA^2 = Ib \times Ib'; \; IA^2 = Ic \times Ic' .....$$

de donde

$$Ia \times Ia' = Ib \times Ib' = Ic \times Ic' = ... \; IA^2 =$$

constante.

De aquí se deduce que los puntos $d, c, b, a - d', c', b', a'$ forman un sistema en involucion del género de la *fig.* 36, y que I es el centro de dicha involucion.

Núm. 80. Si observamos que los ángulos aAa', bAb', cAc'..... son rectos, podremos deducir que *cuando un ángulo recto gira alrededor de su vértice, sus lados cortan á una recta fija en puntos que forman una involucion.*

Núm. 81. *Observacion importante.* Como en los dos ejemplos anteriores el producto $IA \times IB$ (*fig.* 37) y el cuadrado IA^2 (*fig.* 38) pueden tomar valores arbitrarios, se deduce:

1.° Que toda involucion de la primera clase ($m > o$) puede resultar de una figura análoga á la *fig.* 37; ó dicho de otro modo, que dada cualquier involucion de este género, siempre podrán trazarse una série de círculos tales, que cortados convenientemente den dicha involucion. Basta para ello, —si los puntos A y B están dados,— tomar un punto I tal que $IA \times IB$ sea igual á m, y por dicho punto I trazar la secante.

2.° Del mismo modo, toda involucion de la segunda clase ($m < o$) puede ser el resultado de una figura análoga á la 38. Será suficiente para ello tomar

$$IA = IB = \sqrt{n^2}$$

******

y hacer pasar por los puntos A y B una série de circunferencias.

Núm. 82. La relacion $xx' = m$ muestra claramente, — como hemos dicho ya varias veces, — la reciprocidad de los puntos conjugados.

Si damos á x el valor a, el correspondiente de x' será $\frac{m}{a}$;

y recíprocamente, al valor $\frac{m}{a}$ de x corresponde $\frac{m}{\frac{m}{a}} = a$ para

x': podemos pues formar el siguiente cuadro.

	Primero.	*Segundo.*
Valores de x......................	a	$\frac{m}{a}$
Valores correspondientes de x'........	$\frac{m}{a}$	a

Los puntos que corresponden á estas abscisas van pues unidos por pares recíprocos: luego cuando un sistema de puntos dobles situado sobre una recta sea tal, que á cada punto a del primer sistema corresponde otro a' en el segundo, y á este último como punto del primer sistema, corresponde a como formando parte del segundo; si además la relacion que liga las abscisas es algebráica, podrá decirse desde luego que el sistema de puntos está en involucion. Propiedad importante, que á veces permite demostrar *à priori* la involucion de un sistema.

Núm. 83. Hemos dicho anteriormente, que un sistema en involucion puede considerarse como el resultado de superponer dos sistemas homográficos; pero es aún fácil demostrar que, recíprocamente, dados dos sistemas homográficos y contínuos, cualesquiera que estos sean, podrán siempre superponerse en una recta, de tal modo que resulte un sistema en involucion.

Sean $a, b, c.....$ y $a', b', c'.....$ (*fig.* 39), dos sistemas homográficos distribuidos sobre las rectas XX, $X'X'$. Elijamos en cada recta un origen de coordenadas, y refiramos á dichos dos orígenes, por medio de abscisas, todos los puntos de ambos sistemas: supongamos que x y x' representan las abscisas de uno y otro.

Es evidente que si superponemos las rectas XX, $X'X'$ de modo que coincidan los puntos O y O', las abscisas x y x' satisfarán á la relacion general

$$A+Bx+Cx'+Dxx'=o;$$

pero si en vez de los dos orígenes anteriores tomamos otros distintos, y efectuamos una nueva superposicion, las nuevas abscisas satisfarán á cierta ecuacion

$$A'+B'x+C'x'+D'xx'=o,$$

de la misma forma que la anterior (puesto que aún los sistemas serán homográficos), pero cuyos coeficientes serán distintos de aquellos. Resulta de aquí que la posicion de los orígenes determina:

1.° La posicion relativa de los sistemas, es decir, la forma particular del sistema homográfico resultante.

2.° El valor de los coeficientes.

Y ocurre preguntar ¿podrémos escojer O y O', de tal modo que al superponer ambos sistemas XX, $X'X'$, el sistema final resulte en involucion?

Evidentemente será esto posible, si hay modo de hacer que los coeficientes B y C sean nulos al mismo tiempo, ó mas en general, que sean iguales; porque en la primera de estas hipótesis resultará

$$A+Dxx'=o, \text{ ó bien } xx'=-\frac{A}{D},$$

y en la segunda

$$A + B(x + x') + D\,x x' = o,$$

y ambas ecuaciones espresan la involucion (*Núms.* 68 *y* 70).

Resolvamos el problema de las dos maneras.

1.ª Partamos de dos orígenes cualesquiera O y O' (*fig.* 39), y cambiemos uno y otro, el primero sobre la recta XX, el segundo sobre la $X'X'$: sean α y α' las dos constantes indeterminadas que espresan las abscisas de los nuevos orígenes O_1, O'_1; y x_1, x'_1 las nuevas abscisas generales.

Tendremos

$$x = \alpha + x_1,$$
$$x' = \alpha' + x'_1,$$

y sustituyendo en

$$A + B\,x + C\,x' + D\,x\,x' = o,$$

obtendremos entre x_1 y x'_1 la relacion general

$$\begin{array}{r|r|r|l} A + \alpha & B + \alpha' & C + \alpha\alpha' & D = o; \\ + x_1 & + x'_1 & + \alpha' x_1 & \\ & & + \alpha x'_1 & \\ & & + x_1 x'_1 & \end{array}$$

ú ordenando

$$\begin{array}{l r|r|l} A & + \quad B & x_1 + \quad C & x'_1 + D\,x_1\,x'_1 = o. \\ + B\alpha & + \alpha' D & + \alpha D & \\ + C\alpha' & & & \\ + D\alpha\alpha' & & & \end{array}$$

Pues bien, puesto que α y α' son indeterminadas, podemos sujetarlas á las condiciones

$$B + \alpha' D = o;\ C + \alpha D = o;$$

de donde

$$\alpha' = -\frac{B}{D}\,;\ \alpha = -\frac{C}{D}:$$

y ambos valores serán finitos, á menos que D no sea igual á cero.

Esceptuando este caso, la ecuacion queda reducida á la forma

$$M + D\,x_1\,x'_1 = 0,$$

representando por M la constante

$$A + B\alpha + C\alpha' + D\alpha\alpha' = A - \frac{BC}{D}.$$

De aquí se deduce que superponiendo ambos sistemas homográficos de modo que coincidan los nuevos orígenes, tendremos un sistema en involucion, puesto que la forma

$$x_1 x_1' = -\frac{M}{D}$$

es la propia y característica de tales sistemas.

2.° Podríamos tambien demostrar este teorema trasladando uno de los dos orígenes, — O por ejemplo, — de manera que los coeficientes de x y x' fuesen iguales.

Sustituyendo á este fin $x = x_1 + \alpha$ en la ecuacion general, tendremos

$$A + B(x_1 + \alpha) + C x' + D(x_1 + \alpha)\,x' = 0$$

ú ordenando

$$\begin{array}{l} A \\ + B\alpha \end{array} + B x_1 + \left.\begin{array}{l} C \\ + D\alpha \end{array}\right| x' + D x_1 x' = 0$$

Fácil es ahora determinar α de modo que se tenga

$$B = C + D\alpha;$$

y el valor

$$\alpha = \frac{B - C}{D}$$

indicará cuál debe ser el punto O_1 de la recta XX que debe coincidir con O' para que el sistema resultante esté en involucion.

La diferencia entre este método y el precedente estriba únicamente en que, en el primero, segun indican los valores de α y α' (*Núm.* 69), el *origen comun* es el centro de la involucion, y en este es un punto arbitrario.

Núm. 84. Hemos exceptuado el caso particular $D = o$; pero debe observarse que esta hipótesis no tiene importancia alguna para nuestro objeto, pues corresponde á un caso sencillísimo, estudiado ya en la geometría elemental.

En efecto, si $D = o$ tendremos

$$A + Bx + Cx' = o;$$

y determinando un nuevo origen O_1 sobre la recta XX, de suerte que en la ecuacion

$$A + B(x_1 + \alpha) + Cx' = o,$$

ó bien en esta otra

$$A + B\alpha + Bx_1 + Cx' = o,$$

desaparezca el término $A + B\alpha$, — para lo cual bastará escribir

$$\alpha = -\frac{A}{B}, -$$

la ecuacion general tomará la forma

$$B x_1 + C x' = o,$$

de donde

$$\frac{x_1}{x'} = -\frac{C}{D} = \text{constante}.$$

Es decir, que ambos sistemas constituyen dos figuras semejantes, en que el origen O' y el nuevo origen O_1 son puntos homólogos, y $-\frac{C}{D}$ la relacion de semejanza.

Es evidente por lo demás, que siempre podrá determinarse un punto O_1 que sea homólogo de O', puesto que $-\frac{A}{B}$ no puede ser infinita á menos que no se tenga $B = o$, en cuya hipótesis desaparece x de la ecuacion

$$A + B x + C x' = o,$$

y no existe el doble sistema de puntos.

Observacion. En la hipótesis $D = o$, las abscisas

$$-\frac{B}{D}, -\frac{C}{D},$$

de los puntos I, J' de ambos sistemas, conjugados dichos puntos con el infinito, son infinitas; luego dos *sistemas semejantes*, es decir, dos sistemas de puntos que dividen proporcionalmente á dos rectas dadas, son sistemas homográficos particulares, en los que los puntos situados en el infinito son conjugados.

En resúmen:

1.° En la involucion, I y J' coinciden.

2.° En las figuras semejantes, I y J' están en el infinito.

Núm. 85. *Teorema.* Dado un segmento aa' (*fig.* 40), si lo dividimos armónicamente por los puntos c, c'; d, d'; ..... la série de dichos puntos, finita ó infinita, contínua ó discontínua, formará un sistema en involucion del primer género ($m > o$), los extremos a y a' del segmento serán los puntos dobles, y el punto medio o el centro de involucion.

Dem. Consideremos los cuatro puntos a, a', c, c', — y entiéndase que cuanto digamos de este grupo, podemos repetirlo de otro cualquiera

$$a, a', d, d'; \; a, a', e, e'; \; a, a', f, f'; \; \ldots..$$

Puesto que dichos puntos forman un sistema armónico, tendremos

$$\frac{a\,c}{a'c} : \frac{a c'}{a'c'} = -1\,;$$

y tomando el centro o como origen, y expresando las distancias $a\,c$, $a'\,c$, $a\,c'$; $a'\,c'$ en funcion de las abscisas a, a', c, c' de los cuatro puntos, resultará

$$\frac{c-a}{c-a'} : \frac{c'-a}{c'-a'} = -1\,; \text{ ó bien } \frac{c-a}{c-a'} = \frac{a-c'}{c'-a'}\,:$$

advirtiendo que las abscisas a, a', c, c', llevan implícitamente el signo que les corresponde: así, por ejemplo, a es negativa.

De aquí se deduce

$$c\,c' - a'\,c - a\,c' + a\,a' = a\,c - c\,c' - a\,a' + a'\,c',$$

ó bien

$$2\,c\,c' = -2\,a\,a' + a\,c + a'\,c' + a\,c' + a'\,c;$$

pero

$$a = -a',$$

luego

$$c\,c' = a^2:$$

y como demostraríamos análogamente,

$$d\,d' = a^2;\; e\,e' = a^2;\; f\,f' = a^2 \,.....$$

tendremos en general, para las abscisas x, x' de los puntos que dividen al segmento $a\,a'$ armónicamente, la relacion

$$x\,x' = a^2.$$

El sistema pues está en involucion, y a, a' son los puntos dobles.

Núm. 86. *Reciprocamente*. Dado un sistema en involucion (primer género, $m > o$), los puntos dobles y cada par de puntos conjugados forman un sistema armónico.

En efecto, sean I (*fig.* 41) el centro de involucion, D, D' los dos puntos dobles, y a, a' dos puntos conjugados; tendremos,

$$I\,D^2 = I\,a \times I\,a';$$

ó bien

$$\frac{I\,D}{I\,a} = \frac{I\,a'}{I\,D};$$

de donde se deduce

$$\frac{I\,D + I\,a}{I\,a - I\,D} = \frac{I\,a' + I\,D}{I\,D - I\,a'}:$$

y como

$$I\,D = I\,D' \,..... \frac{I\,D' + I\,a}{I\,a - I\,D} = \frac{I\,a' + I\,D'}{I\,D - I\,a'};$$

ó finalmente

$$\frac{a\;D'}{a\,D} = \frac{a'\,D'}{a'\;D},$$

que es precisamente lo que nos proponíamos demostrar.

Núm. 87. Dedúcese del teorema anterior, que definida una involucion por el centro y sus puntos dobles, todo par de puntos que forme con aquellos un sistema armónico, pertenece á la involucion.

En efecto, de la ecuacion

$$\frac{a\,D'}{a\,D}=\frac{a'\,D'}{a'\,D}$$

se puede, retrocediendo paso á paso en los cálculos precedentes, llegar á la primera ecuacion

$$I\,D^2=I\,a\times I\,a'.$$

X.—*Problemas sobre la involucion.*

Núm. 88. *Problema I.* Dada una involucion por dos pares de puntos conjugados, determinar el centro.

Resolucion. Primer caso. Sean [a, a'] y [b, b'] (*fig.* 42) los dos pares de puntos conjugados, y supongamos que un segmento [a, a'] envuelve al otro [b, b']: es claro que en este supuesto, la involucion será del primer género.

Para resolver el problema efectuaremos las siguientes construcciones.

Primero. Tracemos dos circunferencias $a\,A\,A'\,a'$, $b\,A\,A'\,b'$ que pasen respectivamente por los puntos a, a'; b, b': sean A, A' sus puntos de interseccion.

Segundo. Tracemos la secante $A\,A'$ hasta que corte á la recta XX: el punto de interseccion I será el centro.

En efecto, por la propiedad conocida de las secantes, tendremos

$$I\,a\times I\,a'=I\,A\times I\,A',$$

y además

$$I\,b\times I\,b'=I\,A\times I\,A'$$

luego

$$Ia \times Ia' = Ib \times Ib'.$$

Segundo caso. Que los segmentos $a\,a'$, $b\,b'$ (*fig.* **42** *bis*) no tengan ninguna parte comun, en cuya hipótesis aún la involucion será del primer gênero.

La construccion en este caso es idéntica á la del anterior, y está indicada en la *fig.* **42** *bis.*

Este caso solo difiere del primero, en que allí los cuatro puntos estaban á un mismo lado del centro, y en este último, cada par se halla á distinto lado.

Tercer caso. Si los segmentos aa', bb' que determinan cada par de puntos conjugados, en parte se superponen y en parte no (*fig.* **43**), la involucion corresponderá al segundo género ($m < o$), y la construccion para determinar el centro será la siguiente.

Tracemos sobre $a\,a'$ y $b\,b'$ como diámetros dos semicircunferencias aAa', bAb', y desde A, punto en que se cortan, bajemos AI perpendicular sobre XX: el punto I será el polo ó centro de involucion.

En efecto

$$AI^2 = aI \times a'I, \text{ y } AI^2 = bI \times b'I,$$

luego

$$aI \times a'I = bI \times b'I.$$

De suerte que el punto I satisfará á la propiedad característica del centro de involucion.

Núm. **89.** ***Problema II.*** Definida una involucion, ya por dos pares de puntos, ya por el centro y un par de puntos conjugados, hallar otro par cualquiera de puntos tambien conjugados.

Resolucion. ***Primer caso.*** ($m > o$) (*figs.* **42** *y* **42** *bis*). Trazando una circunferencia arbitraria $cAA'c'$, que pase por los puntos A, A': los de interseccion c, c' con la recta XX serán puntos conjugados. En efecto, tendremos evidentemente

$$Ic \times Ic' = IA \times IA':$$

pero

$$IA \times IA' = Ia \times Ia',$$

luego

$$Ic \times Ic' = Ia \times Ia'.$$

Segundo caso. $(m < o)$ (*fig.* 43). Trazando una circunferencia $c\,A\,c'$ arbitraria, pero que tenga su centro sobre XX, los puntos c, c' en que corta á dicha recta, serán puntos conjugados. En efecto, se tiene

$$A\,I^2 = c\,I \times c'\,I, \text{ y } A\,I^2 = a\,I \times a'\,I,$$

luego

$$c\,I \times c'\,I = a\,I \times a'\,I.$$

Núm. 90. *Problema III.* Definida una involucion como en el caso precedente, y dado un punto c sobre la recta XX, hallar su conjugado.

Resolucion. Las circunferencias $c\,A\,A'\,c'$ (*figs.* 42, 42 *bis y* 43), que en el problema anterior eran arbitrarias, aquí quedan completamente determinadas por la condicion de pasar por c: su segundo punto de interseccion con XX será el punto buscado.

Observacion. En el tercer caso (*fig.* 43), el método mas sencillo consiste en unir los puntos A y c, y en levantar $A\,c'$ perpendicular á la recta $A\,c$.

XI.—*Haces en involucion.*

Núm. 91. La manera mas sencilla de estudiar y definir los haces en involucion, consiste en referirlos á los sistemas rectilíneos del mismo nombre.

Sean, en efecto, a, b, c..... a', b', c' (*fig.* 44) un sistema de puntos en involucion, y O un punto arbitrario esterior á la recta XX: si unimos dicho punto O á los a, b, c..... a', b',

c'..... por las rectas OA, OB, OC..... OA', OB', OC'...., el conjunto de rectas así trazadas, formará un haz en involucion.

Observando:

1.° Que la definicion de la involucion reposa en la igualdad de relaciones anarmónicas.

2.° Que todo sistema en involucion es, ó puede considerarse como el resultado de superponer dos sistemas homográficos.

Y 3.° Que la relacion anarmónica de un haz de cuatro rectas, es igual á la de los puntos de interseccion de dicho haz por una secante; se deducen inmediatamente una série de propiedades de los haces, análogas á las ya demostradas para los sistemas en involucion.

Núm. 92. 1.° En todo haz en involucion, las rectas son recíprocamente conjugadas dos á dos. Por ejemplo, OA y OA'; OB y OB', etc.

2.° La relacion anarmónica de cuatro rectas cualesquiera, por ejemplo, OA, OB, OC', OD', es igual á la de sus conjugadas OA', OB', OC, OD; así

$$\frac{\operatorname{sen} AOC'}{\operatorname{sen} AOD'} : \frac{\operatorname{sen} BOC'}{\operatorname{sen} BOD'} = \frac{\operatorname{sen} A'OC}{\operatorname{sen} A'OD} : \frac{\operatorname{sen} B'OC}{\operatorname{sen} B'OD}.$$

3.° Todo haz en involucion puede considerarse como la superposicion de dos haces homográficos.

4.° Las rectas conjugadas del haz son las que unen el punto O á pares de puntos conjugados sobre la recta XX; así, por ejemplo, la recta OI, que une el vértice O al céntro de la involucion, es conjugada con la $O\infty$ paralela á la recta XX.

5.° Los haces en involucion son de dos clases, que corresponden á los dos géneros $m > o$ $m < o$ del (*Núm.* 77) (1). En el *primero* los ángulos AOA', BOB', etc., ó son completa-

(1) Entiéndase siempre, que en estas Nociones de Geometría superior nos limitamos á exponer la parte mas elemental de la ciencia.

mente exteriores, ó están unos contenidos en los otros. En el *segundo*, en parte se superponen y en parte rebosan.

6.° Cuando el sistema de puntos situado sobre la recta XX tiene *puntos dobles*, el haz correspondiente presenta *rectas dobles*, que son las que pasan por dichos puntos dobles.

7.° Si se corta un haz en involucion por una recta, resultará evidentemente un sistema de puntos en involucion.

8.° La ecuacion (2) del *Núm.* 57, que expresa la homografía de dos haces, expresará la involucion si suponemos $N = P$; tendremos pues

$$M + N(tg\,\alpha + tg\,\alpha') + Q\,tg\,\alpha\,tg\,\alpha' = o$$

para condicion analítica de la involucion. Y en efecto, $tg\,\alpha$ y $tg\,\alpha'$ entran simétricamente en la fórmula, por lo tanto pueden cambiarse una por otra.

Núm. 93. Esta última relacion puede simplificarse, eligiendo de cierto modo la recta á que se refieren los ángulos.

En efecto, representando por l el ángulo de la nueva recta, á partir de la cual se cuentan las variables α, α', con la anterior, y por α_1, α'_1, dichos nuevos ángulos variables, tendremos $\alpha = l + \alpha_1$, $\alpha' = l + \alpha'_1$; y sustituyendo en la ecuacion del número precedente

$$\begin{aligned} M + N[tg\,(l + \alpha_1) + tg\,(l + \alpha'_1)] \\ + Q\,tg\,(l + \alpha_1)\,tg\,(l + \alpha'_1) = o; \end{aligned}$$

desarrollando

$$M + N\left[\frac{tg\,l + tg\,\alpha_1}{1 - tg\,l\,tg\,\alpha_1} + \frac{tg\,l + tg\,\alpha'_1}{1 - tg\,l\,tg\,\alpha'_1}\right]$$

$$+ Q\,\frac{tg\,l + tg\,\alpha_1}{1 - tg\,l\,tg\,\alpha_1} \cdot \frac{tg\,l + tg\,\alpha'_1}{1 - tg\,l\,tg\,\alpha'_1} = o;$$

y ordenando

$$\begin{aligned} [M + 2\,N\,tg\,l + Q\,tg^2\,l] + [-M\,tg\,l + N - N\,tg^2\,l + Q\,tg\,l] \times \\ [tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha'_1] + [M\,tg^2\,l - 2N\,tg\,l + Q]\,tg\,\alpha_1\,tg\,\alpha'_1 = o. \end{aligned}$$

Ahora bien, en el coeficiente de $tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha'_1$ entra la indeterminada l; luego sujetando dicha indeterminada á la condicion

$$-N\,tg^2 l + (Q-M)\,tg\,l + N = o,$$

obtendremos una recta tal que refiriendo á ella los ángulos, la expresion analítica de la involucion será de la forma

$$[M + 2N\,tg\,l + Q\,tg^2 l] + [M\,tg^2 l - 2N\,tg\,l + Q]\,tg\,\alpha_1\,tg\,\alpha'_1 = o. \quad (1')$$

ó representando por M' y Q' los coeficientes

$$M' + Q'\,tg\,\alpha_1\,tg\,\alpha_1' = o. \qquad (1')$$

Esta expresion es análoga á la de la involucion rectilínea referida al centro.

Núm. 94. La ecuacion de condicion

$$tg^2 l - \frac{Q-M}{N}\,tg\,l - 1 = o \qquad (2)$$

dá para $tg\,l$ los dos valores siempre reales

$$tg\,l = \frac{Q-M}{2N} \pm \sqrt{\left(\frac{Q-M}{2N}\right)^2 + 1}:$$

luego existen dos rectas tales que, refiriendo á ellas los ángulos variables del haz, la ecuacion de la involucion toma la forma sencilla

$$M + Q\,tg\,\alpha\,tg\,\alpha' = o.$$

Si representamos por l' y l'' los ángulos que determinan dichos ejes, deduciremos de la ecuacion (2), que

$$tg\,l' \times tg\,l'' = -1:$$

por lo tanto los dos ejes centrales (que este nombre les daremos por analogía con el centro de las involuciones rectilíneas) *son perpendiculares entre sí.*

Núm. 95. De la ecuacion (1) del número 93 se deduce

$$tg\,\alpha_1\,tg\,\alpha'_1 = -\frac{M + 2N\,tg\,l + Q\,tg^2\,l}{M\,tg^2\,l - 2N\,tg\,l + Q} = A;$$

representando por A la constante.

Si referimos la involucion al primer eje central determinado por el ángulo l', tendremos

$$A = -\frac{M + 2N\,tg\,l' + Q\,tg^2\,l'}{M\,tg^2\,l' - 2N\,tg\,l' + Q};$$

y si la referimos al segundo, definido por

$$tg\,l'' = -\frac{1}{tg\,l'},$$

resultará

$$A' = -\frac{M + 2N\,tg\,l'' + Q\,tg^2\,l''}{M\,tg^2\,l'' - 2N\,tg\,l'' + Q} = -\frac{M - 2N\frac{1}{tg\,l'} + Q\frac{1}{tg^2\,l'}}{M\frac{1}{tg^2\,l'} + 2N\frac{1}{tg\,l'} + Q}$$

$$= -\frac{M\,tg^2\,l' - 2N\,tg\,l' + Q}{M + 2N\,tg\,l' + Q\,tg^2\,l'} = \frac{1}{A}.$$

De aquí se deduce, que la involucion de un haz está expresada por una de las ecuaciones

$$tg\,\alpha\,tg\,\alpha' = A, \quad \text{ó } tg\,\alpha\,tg\,\alpha' = \frac{1}{A}$$

segun que se refiera á uno ú otro eje central: varian pues las *constantes* que son recíprocas, pero subsiste el *género* de la involucion, puesto que el signo de A es el mismo que el de $\frac{1}{A}$.

Núm. 96. La condicion general $tg\,\alpha\ tg\,\alpha' =$ constante, para la involucion de un haz, puede deducirse inmediatamente.

Imaginemos sobre una recta XX (*fig.* 45) un sistema de puntos $a, a'; b, b'; c, c'$..... en involucion, que para fijar las ideas supondremos es de *primer género* ($m > o$).

Por el centro I levantemos una perpendicular á XX de longitud arbitraria IO, y unamos el punto O á los a, b, c..... a', b', c'..... por medio de rectas; el haz $O\,A\,B\,C$..... $A'\,B'\,C'$..... será, segun la definicion del *Núm.* 91, un haz en involucion.

Ahora bien, la ecuacion de la involucion [a, b, c..... a', b', c'.....] es

$$x\,x' = m,$$

representando por x y x' las abscisas de los puntos a, b, c...., a', b', c'....; pero si representamos en general por α y α' los ángulos variables $Y\,O\,A$, $Y\,O\,A'$, tendremos evidentemente

$$I\,a = O\,I\,tg\,\alpha;\ I\,a' = O\,I\,tg\,\alpha';$$

ó bien

$$x = O\,I\,tg\,\alpha;\ x' = O\,I\,tg\,\alpha';$$

ecuaciones que se verificarán, no solo en cuanto á los valores numéricos de las cantidades que contienen, sino en cuanto á los signos tambien, siempre que contemos los ángulos positivos en el sentido de la flecha, puesto que al mismo tiempo cambiarán de signo α y x, α' y x'.

Sustituyendo los valores de x y x' en la ecuacion $x\,x' = m$, tendremos

$$O\,I^2\,tg\,\alpha\,tg\,\alpha' = m, \text{ ó bien } tg\,\alpha\,tg\,\alpha' = \frac{m}{O\,I^2} = \text{constante}.$$

Observacion. A igual resultado llegaríamos en la *fig.* 45 *bis*, con la única diferencia de que el signo para la constante sería negativo.

Núm. 97. En la involucion de primer género (*fig.* 45), las rectas están simétricamente distribuidas á un lado y otro de la recta OI: es decir, que al par de rectas conjugadas Oa, Oa' situadas á la derecha del eje OI, corresponde otro par de rectas Oc, Oc' conjugadas tambien, y formando con OI ángulos iguales á los que forman las primeras.

En resumen, OI es un eje de figura del haz.

En la involucion de segundo género (*fig.* 45 *bis*), al par de rectas conjugadas Oa, Oa', situadas á distinto lado de OI, corresponde otro par Oc, Oc', simétricamente colocado por relacion al primero; es decir, que OI es tambien un eje de figura.

En la involucion del *primer género*, cada dos rectas conjugadas están de un lado del eje; en la del *segundo*, siempre de distinto lado.

Todas estas proposiciones se demuestran con suma facilidad por la ecuacion $tg\,\alpha\; tg\,\alpha' =$ constante.

Núm. 98. Si por el punto O trazamos la recta OI_1 perpendicular sobre OI, y además medimos los ángulos en el sentido de la flecha f, tendremos:

$$tg\,I_1Oc_1 = -\frac{1}{tg\,IOc} = \frac{1}{tg\,\alpha}\,;\; tg\,I_1Oc'_1 = -\frac{1}{tg\,IOc'} = \frac{1}{tg\,\alpha'}\,;$$

y sustituyendo por *tang* α y *tang* α' sus valores en

$$tg\,\alpha\; tg\,\alpha' = m,$$

resultará,

$$\frac{1}{tg\,I_1Oc_1} \times \frac{1}{tg\,I_1Oc'_1} = m\,;$$

de donde

$$tg\,I_1Oc_1 \times tg\,I_1Oc'_1 = \frac{1}{m}\,;$$

pero las rectas Oc y Oc' son arbitrarias, de suerte que los ángulos $I_1\,Oc_1$ é $I_1\,Oc'_1$ son dos ángulos variables, que fijan la posicion de un par de rectas conjugadas: representándolos por β y β' tendremos

$$tg\,\beta\;tg\,\beta' = \frac{1}{m};$$

luego la $O\,I_1$ es otro eje central de involucion.

Vemos aquí comprobadas las consecuencias á que llegamos en los *Núms.* 94 *y* 65, á saber:

1.° En todo haz en involucion existen dos ejes centrales perpendiculares entre sí: contando los ángulos desde dichos ejes, la condicion analítica es de la forma $tg\,\alpha\;tg\,\alpha' =$ constante.

2.° Las dos constantes son inversas, pero la involucion es del mismo género, ya se considere uno ú otro eje.

Núm. 99. Ocurre sin embargo una duda respecto á la generalidad de las conclusiones á que hemos llegado. En efecto, hemos supuesto que el punto O (*figs.* 45 *y* 45 *bis*) se halla sobre una recta $I\,O$ perpendicular á la $X\,X$, y ocurre preguntar: ¿se verificará, para el caso en que la recta $O\,I$ sea oblícua respecto á la $X\,X$, lo que se verifica en la hipótesis anterior de perpendicularidad?

¿Son diversos los haces en que la recta $O\,I$ es perpendicular á la $X\,X$, de aquellos en que dicha recta es oblícua? O mas claro: todos los haces en involucion, ¿pertenecen al género de los de las *figuras* 45 *y* 45 *bis*?

Estas dudas se desvanecen demostrando que en un haz en involucion Oaa' (*fig.* 47), oblícuo respecto á $X\,X$ [es decir, en el que el ángulo $O\,I\,X$ no es recto], siempre pueden hallarse dos rectas conjugadas Ob, Ob', y perpendiculares entre sí, como veremos en el párrafo próximo.

Por ahora podemos mirar como plenamente demostradas para todos los haces en involucion las proposiciones que preceden, porque si respecto al último método caben dudas [que en breve desaparecerán], no sucede lo propio en cuanto á las demostraciones de los *Núms.* 94 *y* 95, que son absolutamente rigorosas.

XII. — *Propiedades proyectivas de los sistemas y haces en involucion.*

Núm. **100.** Puesto que las propiedades y relaciones de los sistemas rectilíneos y de los haces en involucion dependen únicamente de la igualdad de relaciones anarmónicas, y que estas no cambian en las proyecciones cónicas ó cilíndricas, dedúcese de aquí inmediatamente, que la proyeccion cónica ó cilíndrica de todo sistema ó haz en involucion, será otro sistema ú otro haz en involucion tambien.

Sin embargo, como las propiedades proyectivas son en extremo interesantes, conviene que nos detengamos á explanarlas.

Núm. **101.** *Proyeccion cónica de un sistema rectilíneo en involucion.* Sea xx (*fig.* 46) un sistema rectilíneo en involucion; PP el plano de proyeccion; O el polo ó punto de vista, y XX la proyeccion de xx.

Si a, a'; b, b'; c, c'..... son pares de puntos conjugados de la involucion xx, sus proyecciones A, A'; B, B'; C, C'..... serán puntos conjugados de la involucion XX; y es fácil probar que la relacion anarmónica de cuatro cualesquiera,— A, B, C', D' por ejemplo, — es igual á la de sus conjugados, — A', B', C, D—.

En efecto: puesto que el sistema xx está en involucion, tendremos,

$$R_a\,(a, b, c', d') = R_a\,(a', b', c, d);$$

pero

$$R_a\,(haz\ O\,A\,B\,C'\,D') = R_a\,(a, b, c', d'),$$

$$\text{y}\ \ R_a\,(haz\ O\,A'\,B'\,C\,D) = R_a\,(a', b'\,c, d),$$

luego

$$R_a\,(haz\ O\,A\ B\,C'\,D') = R_a\,(haz\ O\,A'\,B'\,C\,D):$$

por último

$$R_a\,(haz\ O\,A\,B\,C'\,D') = R_a\,(A, B, C', D'),$$

$$\text{y}\ R_a\,(haz\ O\,A'\,B'\,C\,D) = R_a\,(A', B', C, D),$$

y por lo tanto

$$R_a\,(A, B, C', D') = R_a\,(A', B', C, D).$$

Dedúcese de aquí, que la *proyeccion de una involucion es una nueva involucion, y que las proyecciones de los puntos conjugados son los puntos conjugados de la proyeccion.*

Núm. **102.** *Observacion importante.* Nótese sin embargo, que la relacion analítica $xx' = m$ no es proyectiva.

En efecto, si Y es la proyeccion del centro I de la involucion xx, y representamos por X y X' las proyecciones de las variables x, x', es fácil probar que no se verifica $X \cdot X' = m$ ni aun $X \cdot X' =$ constante; pero es inútil detenernos en este punto, porque indirectamente queda demostrado por lo que sigue.

Y no debe extrañarse que así sea: el punto I no está definido por relaciones anarmónicas, luego en general no debe ser proyectivo conservando su carácter de centro de involucion; ó de otro modo, *la proyeccion del centro no puede ser el centro de la proyeccion sino en casos particulares.*

Pongamos más en claro todavía esto mismo.

Hemos dicho que los puntos conjugados de la proyeccion son las proyecciones de los puntos conjugados; luego si trazamos OI, y OY' paralela á xx, estas dos rectas pasarán por el punto I y por el punto del infinito sobre xx conjugado con el centro, y sus dos intersecciones Y, Y' con el plano PP serán dos puntos conjugados. Ahora bien, el punto Y tiene su conjugado Y' en el espacio finito, por lo tanto no puede ser el centro de la involucion XX.

En resúmen:

Toda involucion es proyectiva;

Y son proyectivos los puntos conjugados, y por lo tanto los puntos dobles; pero no es proyectivo el centro.

Como este punto es el único para el cual se verifica

xx = constante, he aquí por qué, contando desde Y las distancias X y X', no puede verificarse dicha condicion.

Nótese sin embargo, que para la proyeccion $A, B, C.....$ $A', B', C'.....$ tendremos una ecuacion $X . X'$ = constante, análoga á la $xx' = m$; pero las variables X y X' no se contarán desde Y sino desde el centro propio de la nueva involucion XX.

Sin embargo, en la proyeccion cilíndrica es evidente que serán proyectivos:

1.° La involucion.

2.° Los puntos conjugados.

3.° El centro.

4.° La relacion analítica xx' = constante, salvo que la constante será distinta.

Núm. **103.** Nada más fácil que determinar el centro de involucion del sistema XX.

Cada dos puntos conjugados del sistema xx dan por sus proyecciones puntos conjugados del sistema XX; pero el centro es conjugado del infinito, luego para buscar dicho centro basta determinar sobre xx dos puntos conjugados, tales que *uno* de ellos se proyecte en el infinito de XX. La proyeccion del *otro* será el centro de la involucion XX.

De aquí se deduce la siguiente construccion.

1.° Trácese por O una paralela Oi' á XX, y prolónguese hasta que encuentre á la recta xx: sea i' este punto. Por ser Oi' paralela á XX, la proyeccion de dicho punto i' estará en el infinito de XX.

2.° Determínese por la relacion $xx' = m$ el punto i sobre xx conjugado con i'.

3.° Hállese la proyeccion K de i, y este punto será el centro de la involucion XX.

En efecto: por ser i' é i conjugados, lo son sus proyecciones; pero la de i' está en el infinito, luego K es el punto de XX conjugado con el infinito, es decir, el centro.

En resúmen, I y el infinito de xx se proyectan en el espacio finito, —en Y é Y'— sobre XX.

Y recíprocamente, K y el infinito de XX corresponden á dos puntos i é i' situados en el espacio finito de xx.

Núm. 104. Es evidente que podemos considerar al sistema $A, B, C\ldots\ldots A', B', C'\ldots\ldots$ como proyeccion sobre la recta XX de la involucion xx, prescindiendo del plano PP; ó bien como el resultado de cortar un haz en involucion O por una secante XX: de este modo tendremos nuevos teoremas relativos á la proyeccion de una involucion rectilínea sobre otra recta, ó á los haces en involucion y las trasversales.

Núm. 105. En el *Núm.* 99 dijimos que, dado un haz O en involucion (*fig.* 47) y una secante XX, tal que la recta OI, que une el vértice O al centro I de la involucion sobre dicha secante, sea oblícua con respecto á ella, siempre podremos hallar dos puntos conjugados b, b', que determinen líneas conjugadas Ob, Ob' formando un ángulo recto.

El problema se reduce en último análisis á este otro de geometría:

Sobre una recta XX buscar dos puntos b, b', tales que $Ib \times Ib' = m^2$ — siendo I un punto fijo y m^2 una constante— y que las rectas Ob, Ob' formen un ángulo recto.

Resolucion. Primer caso: que los puntos b, b' estén á un mismo lado de I.

Sean b y b' los puntos buscados; Ob, Ob' las rectas perpendiculares entre sí; y bOb' la circunferencia trazada sobre bb' como diámetro, que contendrá evidentemente al punto O.

Si desde I trazamos It tangente á dicha semicircunferencia, tendremos

$$It^2 = Ib \times Ib', \text{ luego } It = m.$$

Así, describiendo con m por radio y desde I como centro una circunferencia tt', esta y la bOb' se cortarán normalmente.

Ahora bien, como la circunferencia tt' es conocida, resulta que el problema propuesto puede enunciarse de este modo:

Buscar una circunferencia bOb' cuyo centro esté en XX, que pase por O y que corte normalmente á la tt'.

El centro de dicha circunferencia es evidentemente el punto de interseccion s del eje radical de la circunferencia tt' y del punto O, con la recta XX (1).

En resúmen:

1.° Trácese con m por radio y desde I como centro la circunferencia tt'.

2.° Determínese, como se indica en la nota, el eje radical de esta circunferencia tt' y del punto O.

3.° Haciendo centro en el punto s, interseccion de XX y del eje radical que acabamos de hallar, y con sO por radio, descríbase la semicircunferencia bOb'.

---

(1) El eje radical de una circunferencia O (*fig.* 47 *ter*) y de un punto A, es un caso particular del eje radical de dos circunferencias: basta suponer nulo uno de los radios. Puede definirse tambien de otro modo, considerándolo como lugar geométrico de puntos, tales que la distancia de cada uno de ellos —C por ejemplo— al punto dado A, sea igual á la tangente trazada desde el primero á la circunferencia O: es decir

$$CB = CA.$$

Que el lugar geométrico en cuestion es una línea recta, se demuestra fácilmente.

Del triángulo COB se deduce

$$CO^2 = CB^2 + OB^2;$$

pero

$$CB = CA,$$

luego

$$CO^2 = CA^2 + OB^2,$$

ó bien

$$CO^2 - CA^2 = OB^2 = R^2.$$

Además

$$CO^2 = CD^2 + OD^2;\ CA^2 = CD^2 + AD^2,$$

y restando

$$OD^2 - AD^2 = CO^2 - CA^2 = R^2,$$

Los puntos b, b' serán los puntos buscados:

Y Ob, Ob' dos rectas conjugadas y perpendiculares.

Segundo caso: que los puntos b y b' (*fig.* 46 *bis*) hayan de estar de distinto lado del centro I, lo cual sucederá cuando la constante $-m^2$ de la involucion sobre xx sea negativa.

En esta hipótesis, la solucion del problema es aún más sencilla.

Levantando una perpendicular Ic á XX; tomando en ella $Ic=m$ (si la constante es $-m^2$); y por último, trazando ds perpendicular sobre cO en su punto medio, el de

---

de donde resulta

$$(OD-AD)\,(OD+AD)=R^2 \quad \text{y} \quad OD-AD=\frac{R^2}{OA}=\frac{R^2}{d}$$

representando OA por d.

Las dos ecuaciones

$$OD-AD=\frac{R^2}{d} \quad \text{y} \quad OD+AD=d,$$

determinan un solo punto D sobre la recta XX para proyeccion del punto C, sea este cual fuere; luego todos los puntos C del lugar geométrico están en la recta DC, perpendicular á XX y levantada en el punto D.

Recíprocamente, todo punto C de la recta DC goza de dicha propiedad.

Para determinar el eje DC puede seguirse el siguiente método:

1.° Por un punto B de la circunferencia O trácese una tangente BC.

2.° Por el punto E, medio de la recta AB, levántese EC perpendicular sobre AB: el de interseccion C de esta perpendicular y de la tangente será un punto del lugar geométrico buscado.

3.° La recta DC perpendicular sobre XX será dicho lugar geométrico.

La circunferencia cuyo centro es C, y $CA=CB$ el radio, pasará por A y cortará normalmente á la O.

interseccion s de las rectas ds y XX será el centro de una semicircunferencia de radio sO, que determinará los puntos buscados b, b'.

Y en efecto, por una parte se tiene $sc = sO$; luego la semicircunferencia pasa por O:

$$\text{por otra } cI^2 = Ib \times Ib', \text{ ó bien } m^2 = Ib \times Ib'.$$

Las rectas Ob, Ob' pasarán pues por puntos conjugados b, b' de la involucion XX, y serán perpendiculares entre sí.

Núm. 106. Resulta de lo demostrado en el número anterior, que determinando en un haz en involucion O (*fig.* 48) dos rectas conjugadas OI, $O\infty$, perpendiculares, y una trasversal XX paralela á $O\infty$ ó perpendicular á OI, el punto I será conjugado del infinito, y por lo tanto el centro de la involucion XX:

Luego en un haz en involucion es siempre posible escojer una trasversal, de tal modo que la recta que une el vértice al centro de involucion sea perpendicular á dicha trasversal. La hipótesis del *Núm.* 96 era pues legítima, y las consecuencias á que llegamos completamente generales.

Núm. 107. Hemos dividido los haces en involucion en dos géneros, segun que la constante es positiva ó negativa.

En el primer caso, dos ángulos menores que 180°, formados por dos pares de rectas conjugadas, son ó *esteriores* uno á otro y sin ninguna parte comun, ó, por el contrario, uno está *comprendido* por completo en el otro.

Ejemplos:

AOA' y COC' (*fig.* 45).

AOA' y BOB'.

En el segundo caso, ambos ángulos en parte se superponen y en parte rebosan.

Ejemplo:

AOA', BOB' (*fig.* 45 *bis*).

Otro tanto podemos decir respecto á los segmentos en las involuciones rectilíneas que resultan de cortar un haz por una secante: es decir, que sea cual fuere la trasversal que se considere, si la involucion del haz es de primer género, la involucion rectilínea será tambien de primer género; y si la involucion del haz es de segundo género, del mismo será la de una trasversal cualquiera.

Basta para convencerse de ello examinar con alguna detencion las *figuras* 49 *y* 49 *bis*.

La *figura* 49 representa una involucion del primer género:

O es el vértice;
OI el eje;
XX' una secante perpendicular á dicho eje;
xx' una trasversal cualquiera;
OA y OA' dos rectas conjugadas, de las que la segunda OA' es paralela á la trasversal.
a es el centro de la nueva involucion.

Todos los ángulos comprendidos en α dan puntos conjugados á la derecha del centro a, y los que corresponden al ángulo β, á la izquierda de dicho centro; y en la figura se ve claramente cómo y por qué razon los segmentos $a\infty$, bb', cc'..... están por decirlo unos dentro de los otros, al paso que los $a(-\infty)$, dd', ee'..... situados á la izquierda, son exteriores á los primeros, pero tambien abarcados por completo los menores por los mayores.

La *figura* 49 *bis*, representa una involucion del segundo género.

Las notaciones son las mismas que las de la figura anterior, y se ve facilmente cómo los segmentos en parte se superponen y en parte rebosan.

Núm. **108.** *Proyeccion cónica ó cilíndrica de un haz en involucion.* Sean (*fig.* 50):

O el punto de vista ó centro de la proyeccion cónica; PP el plano del cuadro; oab..... $a'b'$..... un haz en involucion; y $o'ab$..... $a'b'$..... su proyeccion sobre PP.

Puesto que el haz oab..... $a'b'$..... está en involucion, el sistema rectilíneo ab..... $a'b'$ tambien lo estará, y por lo tanto (*Núm.* 104), el haz $o'ab$..... $a'b'$.

De aquí se deduce, que la proyeccion de un haz en involucion es otro haz en involucion:

Las proyecciones de dos rectas conjugadas serán las rectas conjugadas de la proyeccion:

Y las de las rectas dobles (si las hay), serán las rectas dobles de la nueva involucion, pero no serán proyectivos ni los ejes ni las relaciones analíticas.

Núm. 109. Para hallar los ejes $o'I$, $o'I'$ de la proyeccion basta determinàr dos rectas conjugadas oI, oI', tales que sus proyecciones cónicas $o'I$, $o'I'$ formen ángulo recto.

Ahora bien, como los puntos I é I' son puntos conjugados de la involucion rectilínea XX, resulta desde luego que para hallar los ejes deberemos determinar dos puntos conjugados de dicha involucion, y tales que, uniéndolos al centro o', el ángulo $Io'I'$ sea recto. (*Núm.* 105.)

Núm. 110. *Observacion general sobre la teoría de la involucion.* Hemos supuesto en la mayor parte de las teorías anteriores, que se trataba ya de involucion de puntos ya de haces, pero unos y otros continuos, y comprendidos en las fórmulas $xx' =$ constante, ó bien $tg\,\alpha\, tg\,\alpha' =$ constante: sin embargo, es evidente que dichas teorías son aplicables al caso de un número *finito* de puntos ó de rectas, y que aún son aplicables las fórmulas precedentes con esta única restriccion: que la variable x en la primera y la α en la segunda solo podrán tomar un número finito de valores, á los que corresponderá igual número para x' y α'.

Por ejemplo, si se trata de la involucion de 6 puntos ó de 6 rectas, x' y α', podrán recibir 6 valores, pero no más.

XIII.—*Figuras homográficas.*

Definicion.

Núm. 111. Dos figuras A y A' (*fig.* 51) se dicen que son homográficas, cuando cumplen con las siguientes condiciones:

1.ª Que á puntos y rectas de la una A, correspondan puntos y rectas en la otra A', y recíprocamente.

2.ª Que la relacion anarmónica de cada cuatro puntos en línea recta de la figura A, sea igual á la relacion anarmónica de los conjugados de la A'.

3.ª Que la relacion anarmónica de cada cuatro rectas concurrentes de la primera, sea asimismo igual á la de las correspondientes de la segunda.

Que estas condiciones son más que suficientes para determinar una de las figuras A' conociendo la otra A, y ciertos puntos de la primera, es cosa evidente, y por lo tanto parece natural que, siguiendo aquí el mismo método que hemos seguido en los sistemas rectilíneos homográficos, en los haces del mismo nombre, y en la involucion, demostremos que las condiciones anteriores no son incompatibles.

Sin embargo, en el caso presente la demostracion es fácil, y desde luego se ve que tales sistemas homográficos son posibles. En efecto, dos figuras planas, de las que una ha sido formada proyectando cónica ó cilíndricamente la otra, son homográficas, puesto que cumplen con todas las condiciones de la definicion.

De aquí se deduce, que dichas condiciones no son incompatibles; pero ocurre la siguiente duda: ya que por la perspectiva se obtienen figuras homográficas, ¿será cierta la recíproca? Es decir, dadas dos figuras homográficas, ¿podrá siempre considerarse una de ellas como el resultado de proyectar cónica ó cilíndricamente la otra? Más adelante resolveremos por completo esta cuestion: por ahora, y demostrada la posibilidad de las figuras homográficas, estudiemos algunas de sus principales propiedades.

Núm. **112.** Refiramos la primera, *figura* A, á un sistema de ejes coordenados Ox, Oy (*fig.* 51); y asimismo refiramos la segunda A' á otro sistema $O'x'$, $O'y'$.

Cada punto a, de la primera A, está determinado por sus coordenadas $[x, y]$; pero fijo ya dicho punto a, el correspondiente a', de la *figura* A', queda determinado tambien; luego sus coordenadas x', y', serán funciones perfectamente definidas de x é y. Es decir:

$$x' = f(x, y);\ y' = \varphi(x, y).$$

Además, á cada punto a de la *figura* A solo corresponde un punto a' de la *figura* A'; de donde se deduce que las funciones f y φ deben ser de tal naturaleza, que á cada sistema de valores (x, y) solo debe corresponder un sistema de valores para x', y'.

Finalmente, como las relaciones analíticas que ligan ambos sistemas suponemos que son puramente algebráicas, esto nos induce á crêer, con alto grado de probabilidad, que las funciones f y φ deben ser racionales y algebráicas tambien, y en el caso más general, de la forma

$$x' = \frac{\textit{polinomio en } x, y}{\textit{polinomio en } x, y};\ y' = \frac{\textit{polinomio en } x, y}{\textit{polinomio en } x, y}.$$

Pero así como á cada sistema de valores de (x, y) solo debe corresponder uno para (x', y'), así tambien á cada sistema de valores de este último grupo solo debe corresponder uno para (x, y); por lo tanto, las dos ecuaciones anteriores, despues de quitar denominadores, serán de primer grado en estas últimas variables.

En resúmen, tendremos:

$$x' = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma};\ y' = \frac{a'x + b'y + c'}{\alpha' x + \beta' y + \gamma'}.$$

Aún podemos avanzar algo más en la determinacion de la forma de estas funciones.

A las rectas del segundo sistema corresponden rectas en el primero, y sustituyendo en la ecuacion general de las líneas rectas

$$Ax' + By' + C = o,$$

los valores de x' é y' en funcion de x é y, tendremos

$$A.\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} + B.\frac{a'x + b'y + c'}{\alpha' x + \beta' y + \gamma'} + C = o,$$

para la ecuacion del *lugar geométrico* de la figura (A) que corresponde á la *recta*

$$Ax' + By' + C = o$$

de la figura (A'); y como dicho lugar geométrico debe ser *una recta*, la ecuacion precedente deberá resultar de primer grado, lo cual exije que los denominadores

$$\alpha x + \beta y + \gamma, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma'$$

sean iguales.

En resúmen, las relaciones analíticas que enlazan las coordenadas x, y, x', y' serán de la forma

$$x' = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}; \quad y' = \frac{a'x + b'y + c'}{\alpha x + \beta y + \gamma}.$$

Núm. **113.** Hasta aquí hemos seguido en nuestra análisis un método rápido, pero poco preciso. Demos exactitud á los resultados obtenidos acudiendo al método sintético.

Teorema. Si las coordenadas de dos sistemas de puntos están enlazadas por las relaciones analíticas siguientes

$$x' = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}; \quad y' = \frac{a'x + b'y + c'}{\alpha x + \beta y + \gamma} \qquad (1)$$

los dos sistemas (x, y) (x', y'), ó abreviadamente (A) y (A'), serán homográficos, es decir, cumplirán con las tres condiciones del número **111.**

Demostracion. Nótese ante todo, que de las ecuaciones (1) se deducen estas otras dos quitando denominadores y ordenando:

$$x(\alpha x' - a) + y(\beta x' - b) = -(\gamma x' - c),$$

$$x(\alpha y' - a') + y(\beta y' - b') = -(\gamma y' - c'),$$

y de ellas

$$x = \frac{(c\beta - b\gamma)y' + (b'\gamma - c'\beta)x' + (bc' - b'c)}{(a'\beta - \alpha b')x' + (\alpha b - a\beta)y' + (ab' - a'b)}$$

$$y = \frac{(a\gamma - c\alpha)y' + (c'\alpha - a'\gamma)x' + (a'c - ac')}{(a'\beta - \alpha b')x' + (\alpha b - a\beta)y' + (ab' - a'b)} \qquad (1')$$

cuya forma es idéntica á la de las ecuaciones (1).

I. Puesto que á cada sistema de valores de x, y solo corresponde un sistema de valores para x', y', y recíprocamente, (1) (1'), resulta qué á los puntos de la *figura* A corresponden puntos en la *figura* A', y del mismo modo, á los de esta última, puntos tambien en la *figura* A. Queda pues satisfecha la primera condicion.

II. La sustitucion de los valores de x', y' en la ecuacion

$$Ax' + By' + C = o, \qquad (Núm.\ 112)$$

demuestra que á las rectas de la *figura* (A) corresponden rectas en la *figura* A', y recíprocamente.

III. Sea $y = mx + n$ la ecuacion de una recta del sistema (A) (*fig.* 51) sobre la cual hay situados cuatro puntos p', p'', p''', p'''' cuyas coordenadas designaremos por

$$(x_1, y_1);\ (x_2, y_2);\ (x_3, y_3);\ (x_4, y_4).$$

Los cuatro valores de y no son arbitrarios, sino que deben deducirse de la ecuacion $y = mx + n$; así pues, tendremos:

	VALORES DE	
	x	y
Coordenadas de p'............	x_1	$mx_1 + n$
Id. de p''............	x_2	$mx_2 + n$
Id. de p'''...........	x_3	$mx_3 + n$
Id. de p''''..........	x_4	$mx_4 + n$

Si representamos por q', q'', q''', q'''', los cuatro puntos del sistema (A') correspondientes á los p', p'', p''', p'''' del A, — puntos que segun lo demostrado estarán en línea recta, — tendremos:

Abscisa del punto q'...... $x'_1 = \dfrac{ax_1 + b(mx_1 + n) + c}{\alpha x_1 + \beta(mx_1 + n) + \gamma}$

$$= \frac{(a + bm)\,x_1 + bn + c}{(\alpha + \beta m)\,x_1 + \beta n + \gamma} = \frac{Ax_1 + B}{Cx_1 + D};$$

Id. del punto q''..... $x'_2 = \dfrac{ax_2 + b(mx_2 + n) + c}{\alpha x_2 + \beta(mx_2 + n) + \gamma}$

$$= \frac{(a + bm)\,x_2 + bn + c}{(\alpha + \beta m)\,x_2 + \beta n + \gamma} = \frac{Ax_2 + B}{Cx_2 + D};$$

Id. del punto q'''..... $x'_3 = \dfrac{ax_3 + b(mx_3 + n) + c}{\alpha x_3 + \beta(mx_3 + n) + c}$

$$= \frac{(a + bm)\,x_3 + bn + c}{(\alpha + \beta m)\,x_3 + \beta n + \gamma} = \frac{Ax_3 + B}{Cx_3 + D};$$

Id. del punto q''''.... $x'_4 = \dfrac{ax_4 + b(mx_4 + n) + c}{\alpha x_4 + \beta(mx_4 + n) + \gamma}$

$$= \frac{(a + bm)\,x_4 + bn + c}{(\alpha + \beta m)\,x_4 + \beta n + \gamma} = \frac{Ax_4 + B}{Cx_4 + D};$$

representando para abreviar por A, B, C y D los cuatro coeficientes

$$a + bm;\quad bn + c;\quad \alpha + \beta m;\quad \beta n + \gamma.$$

En resúmen, los cuatro puntos P', P'', P''', P'''' están determinados por las abscisas x_1, x_2, x_3, x_4; y las de Q', Q'', Q''', Q'''' por la fórmula

$$\frac{Ax+B}{Cx+D}$$

sustituyendo en vez de x los valores x_1, x_2, x_3, x_4: de aquí se deduce que los sistemas de puntos P', P'', P''', P'''' y Q', Q'', Q''', Q'''' tienen la misma relacion anarmónica (*Núm.* 45).

Es decir

$$R_a(P', P'', P''', P'''') = R_a(Q', Q'', Q''', Q'''').$$

Ahora bien

$$R_a(P', P'', P''', P'''') = R_a(p', p'', p''', p''''), \quad (\textit{Núm.}\ 30)$$

$$\text{y}\ R_a(Q', Q'', Q''', Q'''') = R_a(q', q'', q''', q''''), \quad (\textit{Núm.}\ 30)$$

luego finalmente,

$$R_a(p', p'', p''', p'''') = R_a(q', q'', q''', q'''').$$

IV. Sean (*fig.* 52) $sabcd$ y $s'a'b'c'd'$ dos haces correspondientes.

Decimos haces *correspondientes*, porque, segun hemos demostrado, á las rectas del primer sistema corresponden rectas en el segundo, y por lo tanto si á sa, sb, sc, sd corresponden $s'a'$, $s'b'$, $s'c'$, $s'd'$, puede decirse con verdad que los haces $sabcd$ y $s'b'a'c'd'$ son correspondientes. Además, los puntos s y s', intersecciones de rectas que se corresponden, se corresponderán tambien.

Cortemos uno de los haces por la secante tt, y el segundo por su recta conjugada $t't'$: es evidente que los puntos a, b, c, d, y los a', b', c', d' serán conjugados, y segun lo que acabamos de probar

$$R_a(a, b, c, d) = R_a(a', b', c', d');$$

pero

$$R_a(\textit{haz}\ s) = R_a(a, b, c, d), \text{ y } R_a(\textit{haz}\ s') = R_a(a', b', c', d');$$

luego

$$R_a\,(haz\ s) = R_a\,(haz\ s').$$

Queda pues demostrado el teorema.

Observacion. Lo espuesto en el *Núm.* 112 demuestra en rigor la recíproca de dicho teorema.

Núm. 114. Las fórmulas generales de la homografía

$$x' = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}; \quad y' = \frac{a'x + b'y + c'}{\alpha x + \beta y + \gamma},$$

encierran nueve constantes $a, b, c, a', b', c', \alpha, \beta, \gamma$; pero dividiendo los dos términos de cada quebrado por uno de dichos coeficientes, γ por ejemplo, quedan reducidas las constantes á ocho.

Podremos pues dar á las ecuaciones anteriores esta nueva forma:

$$x' = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + 1}; \quad y' = \frac{a'x + b'y + c'}{\alpha x + \beta y + 1}.$$

Núm. 115. Supongamos que se da una figura A, y cuatro puntos a', b', c', d' de la segunda A', correspondientes á otros cuatro a, b, c, d de la primera.

Es evidente que si A' ha de ser homográfica con A, bastará el conocimiento de estos cuatro puntos para determinar completamente dicha segunda figura.

En efecto, las ecuaciones que enlazan las coordenadas de uno y otro sistema serán de la misma forma que las del *Núm.* 114, y solo resta determinar las ocho constantes $a, b, c, a', b', c', \alpha, \beta$.

Pero las coordenadas de los puntos a y a', b y b', c y c', d y d' (1) deben satisfacer á dichas ecuaciones; luego representando por

---

(1) No se confundan las *constantes* a, b, c, a', b', c', con los *puntos* $a, b, c, d, a', b', c', d'$. Para evitar toda duda, especificaremos siempre si se trata de los puntos ó de las constantes.

$$\left.\begin{array}{l} x_1,\ y_1\\ x_2,\ y_2\\ x_3,\ y_3\\ x_4,\ y_4\\ x'_1,\ y'_1\\ x'_2,\ y'_2\\ x'_3,\ y'_3\\ x'_4,\ y'_4 \end{array}\right\}\text{las coordenadas de los puntos}\left\{\begin{array}{l} a\\ b\\ c\\ d\\ a'\\ b'\\ c'\\ d' \end{array}\right.$$

tendremos las ocho ecuaciones de condicion

$$x'_1 = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\alpha x_1 + \beta y_1 + 1}; \quad y'_1 = \frac{a'x_1 + b'y_1 + c'}{\alpha x_1 + \beta y_1 + 1};$$

$$x'_2 = \frac{ax_2 + by_2 + c}{\alpha x_2 + \beta y_2 + 1}; \quad y'_2 = \frac{a'x_2 + b'y_2 + c'}{\alpha x_2 + \beta y_2 + 1};$$

$$x'_3 = \frac{ax_3 + by_3 + c}{\alpha x_3 + \beta y_3 + 1}; \quad y'_3 = \frac{a'x_3 + b'y_3 + c'}{\alpha x_3 + \beta y_3 + 1};$$

$$x'_4 = \frac{ax_4 + by_4 + c}{\alpha x_4 + \beta y_4 + 1}; \quad y'_4 = \frac{a'x_4 + b'y_4 + c'}{\alpha x_4 + \beta y_4 + 1};$$

de las cuales deduciremos los valores de las constantes a, b, c, a', b', c', α, β; y sustituidas estas en las fórmulas generales

$$x' = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + 1}, \quad y' = \frac{a'x + b'y + c'}{\alpha x + \beta y + 1},$$

tendremos determinada la figura A', puesto que para cada punto $[x_n, y_n]$ del sistema A podremos deducir el correspondiente $[x'_n, y'_n]$ del sistema A' por las fórmulas:

$$x'_n = \frac{ax_n + by_n + c}{\alpha x_n + \beta y_n + 1}; \quad y'_n = \frac{a'x_n + b'y_n + c'}{\alpha x_n + \beta y_n + 1}.$$

Núm. **116.** ***Método gráfico para determinar figuras homográficas.*** Sean A, B, C, m (*fig.* 53) cuatro puntos de un sistema (A), y A', B', C', m' los conjugados de otra figura homográfica (A'). Supongamos que se trazan las rectas AB, AC, BC, Am, Cm; $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$, $A'm'$, $C'm'$; que se determinan las relaciones

$$\frac{aB}{aC} \text{ y } \frac{cB}{cA}; \quad \frac{a'B'}{a'C'} \text{ y } \frac{c'B'}{c'A'};$$

y por último, que se forman las relaciones compuestas

$$\frac{aB}{aC} : \frac{a'B'}{a'C'} \text{ y } \frac{cB}{cA} : \frac{c'B'}{c'A'}.$$

Representando por λ y μ los valores de dichas relaciones, tendremos

$$\frac{aB}{aC} : \frac{a'B'}{a'C'} = \lambda; \quad \frac{cB}{cA} : \frac{c'B'}{c'A'} = \mu;$$

y debe notarse que todos los segmentos aB, aC,..... se consideran con el signo que les corresponde segun el sentido en que se cuenten las distancias positivas sobre los lados AB, CB, $A'B'$, $C'B'$.

Dado un punto cualquiera n de la primera figura, determinaremos el correspondiente n' en la segunda de tal modo que las relaciones análogas á las λ y μ tengan el mismo valor que estas últimas; es decir, de modo que se verifique

$$\frac{dB}{dC} : \frac{d'B'}{d'C'} = \lambda; \quad \frac{eB}{eA} : \frac{e'B'}{e'A'} = \mu;$$

y es facil probar que el conjunto de puntos A', B', C', m', n'..... formará un sistema homográfico con el A, B, C, m, n.....

Demostracion. I. A cada punto n de la primera figura, corresponde evidentemente un punto único n' de la segunda.

En efecto, determinado el punto d, por ejemplo, y la relacion $\frac{dB}{dC}$ deberemos buscar sobre $B'c'$ un punto d', tal que la relacion sencilla $\frac{d'B'}{d'C'}$ tenga por valor $\frac{1}{\lambda}\frac{dB}{dC}$: pero este punto es único, y otro tanto podemos decir de e'; luego el punto n', interseccion de $A'd'$ y $C'e'$, tambien lo será.

II. A cada recta fh del primer sistema, corresponde otra recta $f'h'$ en el segundo.

Sean f, g, h los puntos en que la recta dada corta á los tres lados del triángulo ABC.

Los correspondientes á los dos primeros en el segundo sistema se obtendrán por las igualdades

$$\frac{fB}{fC}=\lambda\frac{f'B'}{f'C'}; \quad \frac{gB}{gA}=\mu\frac{g'B'}{g'A'}.$$

Ahora bien, tomemos un punto cualquiera n sobre fh, y tracemos Ce y Ad: los haces $Cfgn.....h$ y $Afgn.....h$ son homográficos, puesto que la relacion anarmónica de ambos haces es la de los puntos $f, g, n, ... h$; luego

$$R_a\,(haz\ Cfgnh) = R_a\,(haz\ Afgnh) \qquad (1)$$

Pero la secante AB corta al primer en haz en cuatro puntos B, g, e, A, cuya relacion anarmónica es igual á la del haz: es decir

$$R_a\,(haz\ Cfgnh) = R_a\,(B, g, e, A); \qquad (2)$$

y del mismo modo la secante CB corta el haz $Afgnh$ en cuatro puntos f, B, d, C, cuya relacion anarmónica es idéntica á la del haz, por lo tanto

$$R_a\,(haz\ Afgnh) = R_a\,(f, B, d, C). \qquad (3)$$

De las ecuaciones (1), (2) y (3) se deduce

$$R_a\,(B, g, e, A) = R_a\,(f, B, d, C). \qquad (4)$$

Determinemos d' y e' en el sistema A' por el método general, tracemos $C'e'$, $A'd'$, y segun dicho método resultará

1.° $$\frac{gB}{gA} = \mu\,\frac{g'B'}{g'A'}\,; \quad \frac{eB}{eA} = \mu\,\frac{e'B'}{e'A'},$$

de donde se deduce

$$\frac{gB}{gA} : \frac{eB}{eA} = \frac{g'B'}{g'A'} : \frac{e'B'}{e'A'}.$$

2.° $$\frac{fB}{fC} = \lambda\,\frac{f'B'}{f'C'}\,; \quad \frac{dB}{dC} = \lambda\,\frac{d'B'}{d'C'},$$

de donde

$$\frac{fB}{fC} : \frac{dB}{dC} = \frac{f'B'}{f'C'} : \frac{d'B'}{d'C'}$$

De aquí se deduce que los dos grupos B, g, e, A, y B', g', e', A', tienen la misma relacion anarmónica, es decir,

$$R_a\,(B, g, e, A) = R_a\,(B', g', e', A'),$$

y del mismo modo

$$R_a\,(f, B, d, C,) = R_a\,(f', B', d', C');$$

luego segun la ecuacion (4)

$$R_a (B', g', e', A') = R_a (f', B', d', c').$$

Por último, de esta ecuacion se deduce que los haces

$$C'\ B'\ g'\ e'\ A \quad \text{y} \quad A'\ f'\ B'\ d'\ C'$$

ó bien

$$C'\ f'\ g'\ n'\ h' \quad \text{y} \quad A'\ f'\ g'\ n'\ h'$$

tienen la misma relacion anarmónica; pero además dos rectas homólogas $C'h'$ y $A'h'$ coinciden; luego (*Núm.* 56) los puntos n', g', f' están en línea recta, es decir, que n' está sobre $h'f'$; y como otro tanto podríamos demostrar de los puntos m'..... resulta que á la recta fg corresponde en la segunda figura otra recta $f'g'$.

III. La demostracion anterior prueba además, que la relacion anarmónica de cuatro puntos en línea recta de la segunda figura, es igual á la de los correspondientes de la primera.

En efecto, en el haz $A\,m\,n\,p\,q$ (*fig.* 54), cortado por la secante BC, tendremos

$$R_a (m, n, p, q) = R_a (r, s, t, u).$$

En el haz $A'\,m'\,n'\,p'\,q'$, cortado por la secante $B'c'$.....

$$R_a (m', n', p', q') = R_a (r', s', t', u')$$

pero los sistemas $C\,r\,s\,t\,u\,B$ y $C'\,r'\,s'\,t'\,u'\,B'$ son homográficos; luego

$$R_a (r, s, t, u) = R_a (r', s', t', u')$$

de donde se deduce

$$R_a (m, n, p, q) = R_a (m', n', p', q').$$

Núm. 117. Hemos dicho que los sistemas $C, r, s, t, u....$ B, y $C', r', s', t', u', ... B'$, son homográficos, y en rigor esta proposicion queda ya demostrada por las ecuaciones del núm. 116, pero insistiremos aún sobre este punto para alejar toda duda.

Basta para ello probar que *cada dos puntos* del sistema $r'\, s'\, t'\, u'.....$ — por ejemplo, r', s' — unidos á los B', C' forman un grupo cuya relacion anarmónica es igual á la de sus homólogos r, s, B, C.

Los puntos r', s' están determinados por las condiciones

$$\frac{rB}{rC} = \lambda\, \frac{r'B'}{r'C'}\ ; \quad \frac{sB}{sC} = \lambda\, \frac{s'B'}{s'B'}\ ;$$

luego

$$\frac{rB}{rC} : \frac{sB}{sC} = \frac{r'B'}{r'C'} : \frac{s'B'}{s'C'}$$

ó bien

$$R_a\,(B, C, r, s) = R_a\,(B', C', r', s').$$

Del mismo modo demostraríamos

$$R_a\,(B, C, r, t) = R_a\,(B', C', r', t')$$
$$R_a\,(B, C, r, u) = R_a\,(B', C', r', u')$$

....

combinando todos los puntos del sistema con los tres B, C, r.

De aquí se deduce inmediatamente (*Núm.* 40), que ambos sistemas son homográficos.

Núm. 118. Hemos supuesto dadas las constantes λ y μ; supongamos ahora que son desconocidas, pero que en cambio se conocen cuatro puntos del segundo sistema, á saber: A', B', C', y además m' (*fig.* 53), correspondientes á los A, B, C, m del primero: es evidente que trazando las rectas Am, Cm, $A'm'$, $C'm'$ se obtendrán los segmentos

$$Ba,\ Ca;\ Ac,\ Bc;\ B'a',\ C'a';\ A'c',\ B'c';$$

y las relaciones

$$\frac{Ba}{Ca} : \frac{B'a'}{C'a'} \quad \text{y} \quad \frac{Bc}{Ac} : \frac{B'c'}{A'c'}$$

serán los valores de las constantes λ y μ.

Conocidas estas se hallarán sin dificultad todos los puntos del sistema.

Núm. 119. Si en las ecuaciones generales

$$x' = \frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+1}; \quad y' = \frac{a'x+b'y+c'}{\alpha x+\beta y+1}$$

hacemos

$$\alpha x+\beta y+1=o,$$

todo sistema de valores de x é y que satisfaga á dicha ecuacion, y no reduzca á cero los numeradores de x' é y', reducirá estas últimas á ∞, es decir,

$$x'=\infty; \quad y'=\infty;$$

luego *á los puntos de la recta*

$$\alpha x+\beta y+1=o$$

en el primer sistema, corresponden puntos situados en el infinito para el segundo.

Designaremos á fin de abreviar por II esta recta.

Núm. 120. Ocurren, sin embargo, varias dudas que conviene resolver.

I. ¿Podrian todos los valores de x é y, deducidos de

$$\alpha x+\beta y+1=o$$

satisfacer á la ecuacion

$$ax+by+c=o, \text{ ó á la } a'x+b'y+c'=o?$$

En tal caso

$$ax+by+c, \text{ ó } a'x+b'y+c'$$

solo diferirian de $\alpha x+\beta y+1$ por una constante, y tendríamos

$$x'=constante, \text{ ó bien } y'=constante;$$

de suerte que en esta hipótesis no existen sistemas homográficos.

II. ¿Qué valor tomará x', por ejemplo, cuando en vez de x é y sustituyamos los valores $x=x_1$, $y=y_1$, que satisfacen á las dos ecuaciones

$$ax+by+c=o; \quad \alpha x+\beta y+1=o?$$

El valor de x' para dicho sistema de valores es indeterminado, y depende del límite hácia el cual tienda la relacion $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$, á medida que Δy_1 y Δx_1 se aproximan á cero. En efecto, sustituyendo en el valor general de x' en vez de x é y,

$$x_1+\Delta x_1, \quad y_1+\Delta y_1$$

tendremos, puesto que

$$ax_1+by_1+c, \text{ y } \alpha x_1+\beta y_1+1$$

son nulos,

$$x'=\frac{ax_1+by_1+c+a\Delta x_1+b\Delta y_1}{\alpha x_1+\beta y_1+1+\alpha\Delta x_1+\beta\Delta y_1}=\frac{a\Delta x_1+b\Delta y_1}{\alpha\Delta x_1+\beta\Delta y_1}$$

$$=\frac{a+b\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}}{\alpha+\beta\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}}$$

Es decir, que el valor correspondiente de x' no es único: depende, por el contrario, de la *manera* ó *ley* segun la cual lleguen, x á x_1, é y á y_1.

Pero sea cual fuere x', el valor y' es siempre infinito; luego los puntos x', y' correspondientes á x_1, y_1 siempre estarán en el infinito, y el principio que estamos discutiendo no sufre escepcion.

III. Supongamos, por último, que un mismo sistema de valores, x_1, y_1 reduce á cero las tres espresiones

$$ax+by+c;\quad a'x+b'y+c';\quad \alpha x+\beta x+1.$$

En esta hipótesis los valores de x', y' se presentan bajo forma indeterminada; y en efecto, son esencialmente indeterminados, como se ve claramente introduciendo Δx_1 y Δy_1 en dichos valores.

Resulta efectuando esta trasformacion

$$\text{lím. } x' = \text{lím.}\left\{\frac{a+b\dfrac{\Delta y_1}{\Delta x_1}}{\alpha+\beta\dfrac{\Delta y_1}{\Delta x_1}}\right\};\quad \text{lím. } y' = \text{lím.}\left\{\frac{a'+b'\dfrac{\Delta y_1}{\Delta x_1}}{\alpha+\beta\dfrac{\Delta y_1}{\Delta x_1}}\right\}.$$

Dependen, pues, x' é y' del límite hácia el cual tiende $\dfrac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$; ó dicho de otro modo, de la direccion con que se llegue al punto $(x_1\, y_1)$; ó por último, de la ley de variaciones de x é y.

Si representamos $\dfrac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$ por m, tendremos:

$$\text{lím. } x' = x'_1 = \frac{a+bm}{\alpha+\beta m},\quad \text{lím. } y' = y'_1 = \frac{a'+b'm}{\alpha+\beta m}.$$

Al punto (x_1, y_1) del primer sistema corresponden infinitos puntos (x'_1, y'_1) del segundo sistema, y aquí cae en defecto el principio general de la homografía. Esto nos debe hacer sospechar, que las fórmulas particulares que estudiamos, no corresponden á sistemas homográficos.

En efecto, cambiemos de origen las x, y, tomando el punto (x_1, y_1) por nuevo origen: lo que antes eran Δx_1 y Δy_1 serán ahora las nuevas variables x é y.

De este modo tendremos

$$x' = \frac{ax + by}{\alpha x + \beta y}\ ; \quad y' = \frac{a'x + b'y}{\alpha x + \beta y}\ ;$$

ó bien

$$x' = \frac{a + b\dfrac{y}{x}}{\alpha + \beta\dfrac{y}{x}}\ ; \quad y' = \frac{a' + b'\dfrac{y}{x}}{\alpha + \beta\dfrac{y}{x}}\ .$$

Resulta de aquí, que mientras la relacion $\frac{y}{x}$ conserve un valor constante, los valores de x', y' serán invariables, sean cuales fueren x é y; luego á cada *recta*, $\frac{y}{x} =$ *constante*, del primer sistema, corresponde *un punto* en el segundo.

Falta pues la ley general de la homografía: á saber, corresponderse los dos sistemas punto á punto y recta á recta; por lo tanto las ecuaciones en este caso no expresan sistemas homográficos.

El *primer sistema* se reduce á infinitas rectas que pasan por el orígen; el *segundo* á una série de puntos situados sobre la recta

$$(\alpha b - a\beta)\, y' + (a'\beta - \alpha b')\, x' + (ab' - a'b) = o$$

cuya ecuacion resulta de eliminar $\frac{y}{x}$ entre los valores precedentes de x', y'.

Núm. 121. Prescindamos en lo sucesivo de estos casos particulares, y atengámonos á los sistemas verdaderamente homográficos comprendidos en las ecuaciones generales

$$x' = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + 1}; \quad y' = \frac{a'x + b'y + c'}{\alpha x + \beta y + 1}.$$

De estas ecuaciones se deducen los valores de x é y en funcion de x', y', y resulta:

$$x = \frac{(c\beta - b)y' + (b' - c'\beta)x' + (bc' - b'c)}{(\alpha b - a\beta)y' + (a'\beta - \alpha b')x' + (ab' - a'b)};$$

$$y = \frac{(a - c\alpha)y' + (c'\alpha - a')x' + (a'c - ac')}{(\alpha b - a\beta)y' + (a'\beta - \alpha b')x' + (ab' - a'b)};$$

expresiones que tienen la misma forma que las precedentes de x', y'.

A valores finitos de x', y' corresponden valores finitos, en general, para x é y, esceptuando los que satisfacen á la ecuacion

$$(\alpha b - a\beta)\, y' + (a'\beta - \alpha b')\, x' + (ab' - a'b) = o.$$

Representemos por $J'J'$ la recta definida por esta ecuacion.

Todo sistema de valores y', x' que la satisfaga dará valores infinitos para x, y; luego á dicha recta $J'J'$, del segundo sistema, corresponden puntos en el infinito del primero.

En resúmen, á la recta II

$\alpha x + \beta y + 1 = o$. . . . . del 1.^{er} *sistema*
corresponde el ∞ del *segundo;*

y á la recta $J'J'$

$(a'\beta - \alpha b')x' + (\alpha b - a\beta)y' + (ab' - a'b) = o$, del *segundo*
corresponde el ∞ del *primero.*

Núm. 122. Imaginemos que se superpongan los ejes ox, oy; $o'x'$, $o'y'$, así como los planos de las dos figuras homográficas: es evidente que cada punto del plano será *doble*, y pertenecerá ya á la *primera*, ya á la *segunda* figura: en el primer caso su homólogo será un cierto punto a', así como en el segundo tendrá por correspondiente otro punto a, distinto por regla general del punto a'.

Cuando, por el contrario, coincidieran a y a', y esta coincidencia fuera general para todos los puntos del sistema dos á dos, tendríamos sistemas homográficos particulares, á los que podríamos dar el nombre de sistemas en involucion.

Núm. 123. Sean II, $J'J'$ (*fig.* 55) las dos rectas de ambos sistemas que corresponden al infinito.

De su definicion se deducen inmediatamente las siguientes propiedades.

I. Dos rectas ac, bc del primer sistema, que pasen por un punto c de I, tendrán por homólogas, en el segundo sistema, dos rectas paralelas $a'c'$, $b'c'$.

En efecto, el punto de interseccion c de ambas rectas ac, bc, está sobre la recta I; luego su homólogo c' está en el infinito, y por consiguiente las rectas $a'c'$, $b'c'$ se cortan en el espacio infinito; es decir, son paralelas.

II. Análogamente, á dos rectas $d'e'$, $f'e'$, que se cortan sobre J', corresponden en el primer sistema dos rectas paralelas de, fe.

III. Toda recta ae (*fig.* 56) del primer sistema, paralela á I, tiene por homóloga otra recta $a'e'$ paralela á J'.

En efecto, las rectas a é I se encuentran en el *infinito;* pero designando por ∞ este punto de interseccion y por ∞' el homólogo, tendremos: 1.° que por pertenecer ∞ á a, ∞' debe estar sobre a'; 2.° que por hallarse ∞ en I, ∞' debe hallarse en el infinito de la segunda figura; 3.° que por pertenecer ∞ al infinito de la primera, ∞' debe estar sobre J': es decir, que ∞' debe hallarse sobre a', sobre J', y en el infinito; luego el punto de interseccion de a' y J' está en el infinito y ambas rectas son paralelas.

Dedúcese de aquí esta importantísima consecuencia: *agru-*

pando los puntos de la primera figura por paralelas á I, sus homólogos de la segunda se hallarán sobre paralelas á J'.

IV. Sean ae y $a'e'$ (*fig.* 56) rectas paralelas respectivamente á I y J', y además conjugadas; y representemos por a, a'; b, b'; c, c'..... pares de puntos conjugados situados sobre ambas rectas.

Puesto que dichos puntos son conjugados, la relacion anarmónica de cuatro puntos cualesquiera de un sistema, es igual á la de los correspondientes del otro, y por consiguiente ambos sistemas son homográficos; pero los puntos del infinito en ae y $a'e'$ son conjugados, luego los sistemas son semejantes (*Núm.* 84), y tendremos

$$ab : bc : cd : de..... :: a'b' : b'c' : c'd' : d'e'.....$$

V. Sean (*fig.* 57):

I y J' las rectas de dos sistemas homográficos conjugadas con el infinito;

ad, y $a'd'$;

eh, y $e'h'$;

lp, y $l'p'$. rectas conjugadas dos á dos, y paralelas, las del primer sistema á I, las del segundo á J';

sl, sm, sn, sp............ rectas del primer sistema concurrentes sobre I;

$a'l', b'm', c'n', d'p'$..... las conjugadas del segundo, que serán (2.ª *propiedad*) paralelas entre sí.

Entre todas las rectas ad, eh, lp..... busquemos una, L, tal que

$$lm = a'b' = l'm':$$

tendremos, segun lo demostrado anteriormente, y puesto que

$$l \text{ y } l';\ m \text{ y } m';\ n \text{ y } n';\ p \text{ y } p'.....$$

son puntos conjugados,

$$lm : l'm' :: mn : m'n' :: np : n'p'.....$$

pero

$$lm = a'b' = l'm',$$

luego

$$mn = m'n'; \; np = n'p' \ldots\ldots$$

De aquí se deduce, que entre las rectas homólogas paralelas á I y J' siempre hay dos en las que los puntos correspondientes determinan segmentos iguales.

Designaremos en adelante, para abreviar, por L y L' dichas rectas.

Núm. 124. Sean ia y $j'a'$ (*fig.* 58) dos rectas homólogas: el punto i en que la primera corta á I será conjugado del infinito de $j'a'$; y recíprocamente, el punto j' en que la segunda recta corta á J', será conjugado con el infinito de la recta ia.

Sean además a y a', b y b' dos pares de puntos conjugados: facilmente podremos demostrar el siguiente

Teorema. El producto $ia \times j'a'$ es constante, sean cuales fueren los puntos a y a': es decir,

$$ia \times j'a' = ib \times j'b' = \textit{constante}.$$

Demostracion. Consideremos sobre ia los cuatro puntos i, b, a, y el *infinito;* y sobre $j'a'$ los conjugados, á saber..... el *infinito*, b', a', y j'.

Designando, para abreviar, por i' y j los puntos del infinito del segundo y del primer sistema, tendremos, segun la definicion de la homografía,

$$\frac{bi}{ai} : \frac{bj}{aj} = \frac{b'i'}{a'i'} : \frac{b'j'}{a'j'};$$

pero

$$\frac{bj}{aj} = 1,$$

puesto que j está en el infinito; y por la misma razon

$$\frac{b'i''}{a'i''}=1,$$

luego

$$\frac{bi}{ai}=\frac{a'j''}{b'j''}$$

ó bien

$$bi \, . \, b'j''=a'j'' \, . \, ai=constante.$$

Observacion. En rigor este teorema es evidente, porque los sistemas $i, b, a\ldots\ldots j'', b', a'\ldots\ldots$ que son homográficos, superpuestos de manera que i y j' coincidan, constituyen (*Núm.* 84) un sistema en involucion, y por lo tanto

$$ia \times j''a'=ib \times j''b'=constante.$$

Núm. 125. *Teorema.* Dos figuras homográficas cualesquiera pueden siempre considerarse como perteneciendo, ó habiendo pertenecido, á un sistema de proyecciones cónicas: es decir, que una de ellas podrá colocarse de modo que sea la perspectiva de la otra.

Demostracion. Coloquemos las dos figuras de manera que cumplan con las siguientes condiciones:

1.ª Que coincidan las líneas L, L' (*figs.* 57 *y* 59), y en estas los puntos homólogos a, a'; b, b'; c, $c'\ldots\ldots$ (*fig.* 59).

2.ª Que el ángulo de los dos planos sea tal que, trazando por II (*fig.* 59) un plano paralelo al de la segunda figura, y por $J'J'$ otro paralelo al de la primera, la recta interseccion TT se halle en el plano de dos rectas conjugadas cualesquiera MM, $M'M'$, paralelas á LL.

Si representamos por Sa, Sb, $Sc\ldots\ldots$ un sistema de rectas de la primera figura concurrentes en S, y por $a'm'$, $b'n'$, $c'p'\ldots\ldots$ sus conjugadas, que serán paralelas entre sí, trazando por S una recta SO paralela á estas últimas, el punto O en que corte á TT será el punto de vista, y en esta posicion una de las figuras será la proyeccion cónica de la otra.

Demostremos ante todo que dicha posicion es posible.

Cortemos á este fin la *fig.* 59 por un plano perpendicular á la recta LL, y sean (*fig.* 59 *bis*) (1):

LM' la interseccion con el plano de la segunda figura homográfica;

LI la interseccion con el de la primera figura;

M, M', I y J' los puntos en que dicho plano corta á las rectas MM, $M'M'$, II, $J'J'$ (*fig.* 59).

La cuestion queda reducida á la siguiente: dar una inclinacion tal á la recta LI sobre la LJ' (*fig.* 59 *bis*), que el punto a en que $M'M$ corta á bI (paralela á LJ'), coincida con el b, interseccion de bI y $J'b$ (paralela á LI); porque entonces la recta en que el plano $MM\ M'M'$ (*fig.* 59) corte al $II\ TT$ coincidirá con la recta TT, interseccion de los planos que pasan por II y $J'J'$ paralelamente á los de las dos figuras homográficas.

Pero el problema no solo es *posible*, sino *indeterminado;* es decir, que sea cual fuere la posicion de las rectas LJ', LI (*fig.* 59 *bis*), siempre las bI, MM', y $J'b$ concurrirán en un punto. En efecto, el punto I y el infinito de LM' son conjugados; tambien lo son M y M'; L lo es consigo mismo; y el infinito de LI con J'; luego la relacion anarmónica de I, M, L, ∞, será igual á la de ∞, M', L y J': pero los dos puntos L coinciden, por lo tanto (*Núm.* 29), las rectas $bI\infty$, MM', bL, $bJ'\infty$, que los unen dos á dos, concurrirán tambien, sea cual fuere la inclinacion de LI, LJ'.

Demostrado ya que es posible dar á las dos figuras homográficas la posicion que se indica en la *figura* 59, solo resta probar que cada dos puntos homólogos r, r' (por ejemplo), están en línea recta con el punto O.

Tracemos la recta Src, y su homóloga $c'p'$: puesto que SO es paralela al sistema $a'm'$, $b'n'$..... será paralela á

---

(1) Llamamos la atencion del lector sobre la siguiente *errata:* la *figura* 60 de la lámina 8.ª es *figura* 59 *bis*.

$c'p'$: luego las tres rectas SO, Sc y $c'p'$ están en un plano, y en el mismo se halla la rr': falta probar que pasa esta última por O.

Sea p el punto de interseccion de Sc con MM, y p' su homólogo, que estará sobre $c'p'$ y $M'M'$.

Los cuatro puntos c, r, p, S, son conjugados de c', r', p', y el infinito, y sus relaciones anarmónicas son por lo tanto iguales: además c y c' coinciden, luego (*Núm.* 29) las rectas rr', p, p' y $OS\infty$ concurrirán tambien en un punto, es decir, que rr' pasa por el punto O, interseccion de las otras dos.

Observaciones. En la *fig.* 59 se ve claramente:

1.° Cómo la recta II del primer sistema es conjugada con el infinito de la segunda figura.

2.° Cómo del mismo modo $J'J'$ es conjugada con el infinito de la primera.

3.° Cómo las rectas MM, $M'M'$ son paralelas á II y $J'J'$.

Y 4.° Cómo á las rectas concurrentes Sa, Sb, Sc..... corresponden las paralelas $a'm'$, $b'n'$, $c'p'$.....

La demostracion precedente da además el medio de colocar dos figuras homográficas de modo que una de ellas sea perspectiva de la otra. El problema admite infinitas soluciones.

Núm. 126. Resulta del teorema precedente, que la transformacion homográfica no es en el fondo otra cosa que la transformacion cónica.

Resulta además que la línea homográfica de una *recta*, es otra *recta;* la de una *cónica*, otra *cónica;* y en general, que dicha transformacion no altera el grado de las líneas: consecuencia á que tambien conducen las fórmulas de transformacion.

Núm. 127. Puesto que para establecer la homografía de dos sistemas, basta fijar correspondencia entre cuatro puntos a, b, c, d del primero y otros cuatro a', b', c', d' del segundo, dedúcese que *dos cuadriláteros arbitrarios* $abcd$, $a'b'c'd'$ *siempre pueden considerarse como dos figuras homográficas, y siempre por lo tanto podrá uno de ellos ser la perspectiva del otro.*

Núm. 128. El teorema anterior aún puede presentarse bajo forma de problema en los siguientes términos:

Colocar dos cuadriláteros $abcd$, $a'b'c'd'$, *de modo que sean secciones de un mismo ángulo sólido.*

Las consideraciones de los (*Núms.* 116 *y* 123) resuelven este problema por completo.

XIV.—*Casos particulares de figuras homográficas.*

Núm. 129. I. *Sistemas homográficos en que hay dos rectas homólogas situadas en el infinito.* Si suponemos que en la *fig.* 59 se aleja el punto O del espacio finito en una direccion cualquiera, oblícua respecto á los planos coordenados, las rectas II, $J'J'$ se alejarán indefinidamente de LL, y cuando el punto O llegue al infinito (perdónesenos este modo de espresarnos en gracia á la brevedad), la recta II conjugada con el infinito de la segunda figura, se hallará en el infinito tambien; así como la recta $J'J'$ de la segunda figura conjugada con el infinito de la primera, se habrá trasladado al infinito de dicha segunda figura.

En resúmen, todo punto del infinito en cada figura tiene su conjugado en el infinito, como puede comprobarse directamente.

Cuando esta hipótesis se verifique, las rectas proyectantes serán paralelas, y la proyeccion cónica se habrá transformado en proyeccion cilíndrica.

Así pues, las proyecciones cilíndricas son casos particulares de las figuras homográficas.

Núm. 130. Las ecuaciones generales de la homografía se simplifican en este caso notablemente.

En efecto, la ecuacion de la recta II es

$$\alpha x + \beta y + 1 = o,$$

y para que dicha recta se traslade al infinito, es necesario que sus coordenadas al origen

$$-\frac{1}{\alpha}, \quad -\frac{1}{\beta}$$

sean infinitas: es decir, $\alpha = o$, $\beta = o$.

Los valores de x', y' se convertirán en

$$x' = ax + by + c; \quad y' = a'x + b'y + c'.$$

Pero en esta misma hipótesis la recta $J'J$ cuya ecuacion es

$$(\alpha b - a\beta)y' + (a'\beta - \alpha b')x' + (ab' - a'b) = o;$$

se traslada al infinito, puesto que $\alpha b - a\beta$ y $a'\beta - \alpha b'$ se reducen á cero para $\alpha = o$, $\beta = o$, (esceptuando el caso particular $ab' - a'b = o$), luego los valores de x, y serán de la forma

$$x = a_1 x' + b_1 y' + c_1; \quad y = a'_1 x + b'_1 y + c'_1.$$

Núm. 131. Hemos esceptuado el caso particular

$$ab' - a'b = o;$$

y en efecto, cuando se verifica esta relacion es imposible despejar x é y en funcion de x', y' de las ecuaciones

$$x' = ax + by + c; \quad y' = a'x + b'y + c',$$

y no existen por lo tanto dos sistemas de puntos conjugados dos á dos.

Núm. 132. Fácil es comprobar las relaciones analíticas precedentes, deduciéndolas de la proyeccion cilíndrica.

Sean A y A' (*fig.* 60) dos figuras planas, deducidas una de otra por proyecciones cilíndricas, y oS la direccion de las líneas proyectantes.

Tracemos en el plano AA dos ejes coordenados ox, oy; y sean $o'x'$, $o'y'$ sus proyecciones sobre el plano $A'A'$: escojamos dichas líneas $o'x'$, $o'y'$ como ejes coordenados de la figura $A'A'$.

Las ordenadas ap y $a'p'$ tendrán una relacion constante, independiente de la posicion del punto a, y dependiente tan solo de las direcciones de los ejes oy, $o'y'$. En efecto, si cortamos el plano $ap\ a'p'$ por un plano $A''A''$ perpendicular á la direccion oS, tendremos

$$a''p''=a'p' \text{ tang. } (y', A''); \quad a''p''=ap \text{ tang. } (y, A'');$$

de donde

$$\frac{ap}{a'p'}=\frac{\text{tang. } (y', A'')}{\text{tang. } (y, A'')}=\text{constante}$$

(dependiente de las direcciones oy, oy'), ó en general,

$$\frac{y}{y'}=\lambda;$$

y despejando

$$y'=\frac{1}{\lambda}\ y.$$

Análogamente tendremos

$$x'=\frac{1}{\mu}x.$$

Si ahora cambiamos de ejes en el plano AA, por ejemplo, resultará

$$y=mx_1+ny_1+p; \quad x=m'x_1+n'y_1+p,$$

y sustituyendo en y', x',

$$y'=\frac{m}{\lambda}x_1+\frac{n}{\lambda}y_1+\frac{p}{\lambda}; \quad x'=\frac{m'}{\mu}x_1+\frac{n'}{\mu}x_1+\frac{p_1}{\mu}$$

que es la forma general del número 130.

Núm. 133. En este caso particular de la homografía es claro:

1.° Que á rectas paralelas corresponden rectas paralelas tambien.

2.° Que las rectas homólogas quedan divididas en partes proporcionales por los puntos homólogos.

Y 3.° Que la relacion de las áreas homólogas es constante, é inversa de la de las tangentes de los ángulos $[A, A'']$, $[A', A'']$.

Núm. 134. II. *Cuando coinciden las rectas II, $J'J'$, así como los puntos de ambos sistemas dos á dos, pero recíprocamente.*

Precisemos ante todo la naturaleza de los sistemas homográficos que nos proponemos estudiar.

Ambos sistemas se hallan situados en un mismo plano; se superponen exactamente, de tal modo que cada punto A es doble; y por último, si consideramos á dicho punto A ó $[a, b']$, ya como perteneciendo al primer sistema, y determinamos su conjugado a' en el segundo; ya como formando parte del segundo sistema, y determinamos su conjugado b en el primero, los puntos a' y b coinciden en uno solo A'.

Esto mismo se verifica para todos los puntos del plano.

La definicion precedente es análoga á la de la *involucion*, y puede presentarse bajo esta otra forma:

Dados en un plano tantos pares de puntos como se quiera, A, A'; B, B'; C, C'..... la relacion anarmónica de cuatro puntos cualesquiera en línea recta es igual á la de sus conjugados: y en general, la figura formada por varios de estos puntos será homográfica de la formada por los correspondientes.

Demostremos ante todo la *posibilidad* de tal sistema.

Imaginemos dos planos $LL\,II$, $LL\,J'J'$ (*fig.* 61), que se cortan segun LL, y un punto O, como punto de vista, en el plano bisector OLL del ángulo diedro formado por dichos planos.

Sea a un punto del plano $LLII$: para determinar su homólogo en el plano de la segunda figura, tracemos la recta Oa hasta que corte en a' al plano $J'J'LL$. Si imaginamos la recta $Ob'b$, simétrica con Oaa' por relacion al plano bisector, esta recta determinará dos puntos conjugados b', b.

Ahora bien, haciendo girar al plano $LLII$ alrededor de LL hasta que se confunda con el plano $LLJ'J'$, es evidente:

1.° Que se confundirán las rectas II, $J'J'$.

2.° Que se confundirán asimismo a y b'; a' y b.

Y como otro tanto puede decirse de los demás puntos del sistema, queda plenamente comprobada la definicion.

Observacion. Del mismo modo que en las involuciones rectilíneas tenemos aquí dos sistemas geométricamente iguales, y que por lo tanto pueden superponerse; pero que, por estar agrupados los puntos segun ciertas reglas de órden y correspondencia, son esencialmente distintos, si bien gozan de todas las propiedades que hemos demostrado para la homografía.

Aquí como allí, todo punto es doble, y los acentos no determinan cada sistema en particular, sino el órden de agrupacion ó correspondencia. Asimismo, los puntos conjugados con el infinito en uno y otro sistema,—que son los que forman las rectas II, $J'J'$—coinciden, como en la involucion rectilínea coincidian los I é I formando el centro; por último, así como en dichos sistemas rectilíneos habia puntos dobles reales ó imaginarios, hallaremos aquí tambien rectas dobles.

Núm. 135. Sea (*fig.* 62) un sistema en involucion, y conservemos las denominaciones de la (*fig.* 61). Hemos puesto en o dos letras o y o', para indicar que este punto es el resultado de la superposicion de o y o' (*fig.* 61), pero generalmente solo lo designaremos por o.

Una observacion análoga debemos hacer respecto á la recta II ó $J'J'$ (*fig.* 62).

Si representamos por a un punto del sistema, facilmente se hallará su conjugado a'. Observando que a' está en la línea oma', y en la perpendicular la' á LL, deduciremos la siguiente construccion.

1.° Trácese oa hasta que corte á LL en l.

2.° Bájese am perpendicular á LL.

3.° Levántese la' perpendicular á dicha recta LL.

Y 4.° Búsquese el punto de interseccion de las rectas om y la': este punto a' será el conjugado de a.

Observacion. Considerando á LL como la línea de tierra, la construccion precedente es la misma que para hallar las trazas de una recta cuyas proyecciones se conocen.

Núm. 136. Si aplicamos la construccion precedente á puntos situados sobre la recta LL, hallaremos los mismos puntos: la recta LL es doble, y cada uno de sus puntos es doble tambien, es decir, que se confunde con su conjugado.

Si aplicamos la misma construccion á puntos de la recta oy, obtendremos para conjugados puntos distintos, pero situados en la misma recta.

Es decir, que dicha recta es *doble*, pero no lo son sus puntos (1).

Por último, trazando la recta $L'L'$ paralela á II ó $J'J'$, y á igual distancia de esta que la LL, todo punto de dicha recta $L'L'$ tendrá su punto conjugado sobre la misma recta. La línea $L'L'$ es pues *doble*, pero no lo son sus puntos.

En efecto, sea b el punto propuesto: para hallar su conjugado deberemos, aplicando la construccion general, bajar bn perpendicular á LL, prolongar ob hasta k, y por este punto levantar kb' perpendicular tambien á LL: el punto b', interseccion de on y kb', será el correspondiente de b.

La recta $L'L'$ no es otra cosa que la superposicion de las dos rectas segun las cuales corta á los planos coordenados de la *fig.* 61 un plano trazado por O, perpendicularmente al plano bisector y paralelo á LL.

Núm. 137. Deduzcamos de aquí las ecuaciones de la involucion.

Tomemos á este fin por ejes coordenados las rectas ox y oy.

---

(1) Al decir que los puntos de oy no son dobles, nos referimos á la involucion, y queremos significar que dado un punto, su conjugado no se confunde con él: por lo demás, si al sistema en involucion le consideramos como el resultado de superponer dos sistemas homográficos, claro es que todo punto del plano es doble.

Tendremos, adoptando las notaciones,

$op=x,$

$pa=y,$

$op'=x',$

$p'a'=y',$

$p'l=constante=d,$

$$\frac{ap}{op}=\frac{lp'}{op'};\quad \frac{mp}{op}=\frac{p'a'}{op'}:$$

ó bien

$$\frac{y}{x}=\frac{d}{x'};\quad \frac{d}{x}=\frac{y'}{x'};$$

de donde se deduce

$$x'=\frac{dx}{y};\quad y'=\frac{dx'}{x}=\frac{d^2}{y}.$$

En resúmen, las fórmulas fundamentales serán

$$x'=\frac{dx}{y};\quad y'=\frac{d^2}{y}$$

que están comprendidas ambas en las generales de la homografía.

Núm. 138. De las fórmulas generales

$$x'=\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+1};\quad y'=\frac{a'x+b'y+c'}{\alpha x+\beta y+1}$$

podemos deducir las precedentes con suma sencillez.

Puesto que los infinitos de ambos sistemas coinciden siempre, es claro que deben coincidir las rectas *II, J'J':* tomemos dicha recta por eje de las x, en cuyo caso en vez de

$$\alpha x+\beta y+1,$$

que representa el primer miembro de la ecuacion de II, deberemos escribir solamente y.

Resultará pues

$$x' = \frac{ax + by + c}{y}; \quad y' = \frac{a'x + b'y + c'}{y} \qquad (1)$$

Para que los dos sistemas homográficos superpuestos se hallen en involucion, es necesario y suficiente que al determinar x, y en funcion de x', y', las fórmulas que obtengamos sean idénticas á las (1), porque de este modo, cuando consideremos al punto (x, y) como formando parte del primer sistema, hallaremos para las coordenadas (x', y') del correspondiente en el segundo

$$x' = \frac{ax + by + c}{y}; \quad y' = \frac{a'x + b'y + c'}{y};$$

y cuando, por el contrario, consideremos á (x, y) como punto del segundo sistema, su correspondiente x_1, y_1 en el primero vendrá dado por las mismas fórmulas

$$x_1 = \frac{ax + by + c}{y}; \quad y_1 = \frac{a'x + b'y + c'}{y} \qquad (1')$$

con lo cual (x_1, y_1), y (x', y') coincidirán.

Debemos pues despejar x é y de dichas ecuaciones (1), con lo cual obtendremos

$$x = \frac{c'x' - cy' - c'b + cb'}{ay' - a'x' - ab' + a'b};$$

$$y = \frac{ac' - a'c}{ay' - a'x' - ab' + a'b} \qquad (2)$$

é identificar despues los sistemas (1') y (2).

Tendremos, efectuando estas operaciones,

$$-\frac{a'}{a}=o;\quad \frac{ab'-a'b}{a}=o;\quad a=\frac{c'}{a};\quad b=-\frac{c}{a};$$

$$c=\frac{cb'-c'b}{a};$$

$$a'=o;\quad b'=o;\quad c'=\frac{ac'-a'c}{a};$$

ó bien

$$a'=o;\quad b'=o;\quad a^2=c';\quad ab=-c.$$

Las fórmulas (1) quedan reducidas á la forma

$$x'=\frac{ax+by+c}{y};\quad y'=\frac{a^2}{y}. \qquad (1'')$$

Si conservando para eje de las x la recta II cambiamos la posicion y la direccion del eje de las y, deberemos sustitúir en (1″) por x é y sus valores dados por las fórmulas de transformacion

$$x=\alpha\pm x_1+my_1;$$
$$y=ny_1;$$

y resultará

$$x'=\frac{a\alpha\pm ax_1+amy_1+bny_1+c}{ny_1};\quad y'=\frac{a^2}{ny_1}$$

y determinando las indeterminadas α, m, n por las condiciones

$$a\alpha+c=o,$$
$$am+bn=o,$$

resulta finalmente

$$x' = \frac{\pm \frac{a}{n} x_1}{y_1} \; ; \quad y' = \frac{\frac{a^2}{n}}{y_1}$$

formas idénticas á las del *Núm.* 137 si se hace $n=1$.

Núm. 139. Sea cual fuere la inclinacion de los planos $LLII$, $LLJ'J'$ (*fig.* 61), las rectas $a'a$..... que unen puntos homólogos, siempre concurrirán en un punto O variable de posicion, luego en el límite concurrirán tambien; por lo tanto todas las rectas aa' (*fig.* 62) son concurrentes.

La posicion del punto de concurso se determinará facilmente, porque es la posicion límite del vértice O en el rombo $NoOo'$ (*fig.* 61), cuando No y No' coinciden: basta para ello tomar $oS=oN$ (*figs.* 61 *y* 62).

Veremos en breve que esta circunstancia corresponde á las figuras homológicas, y que por consiguiente la involucion de los sistemas es un caso particular de la homología.

Núm. 140. Puesto que entre las ordenadas y é y' de dos puntos correspondientes se verifica la relacion $yy'=d^2$, ó bien $oA \times oA' =$ constante, resulta que los puntos A, A'..... forman sobre el eje de las y una involucion cuyo centro es o; S y N los puntos dobles.

Por otra parte toda involucion es proyectiva, y cuando las líneas proyectantes son paralelas la proyeccion del centro es el centro de la proyeccion; luego si sobre la recta Saa', por ejemplo, determinamos los puntos homólogos a, a'; c, c'..... podremos considerar al sistema rectilíneo $S, s, c, a, a', c', \infty$..... como la interseccion del haz paralelo $SoCAA'C'\infty$..... por una secante Sc', y por consecuencia dicho sistema estará en involucion: su centro será s, y sus puntos dobles S, r.

Núm. 141. Resulta de lo dicho, que podremos considerar engendrado al sistema de la *fig.* 62 por la rotacion de la recta SC' alrededor de S y por el cambio de forma de la involucion situada sobre dicha secante, de suerte que cada punto describa una perpendicular á la posicion primitiva SC'.

Nótese que los puntos homólogos pueden agruparse de dos maneras:

1.° Sobre rectas concurrentes en S.

2.° Sobre paralelas homólogas A, A'; C, C'.....

Núm. 142. Las consideraciones que preceden, dan un nuevo método para determinar el punto homólogo a' de un punto dado a.

Basta trazar:

1.° La secante Sa.

2.° La recta aA paralela á II.

3.° Determinar el punto A' homólogo de A y la recta $A'a'$ paralela á Aa.

La interseccion de las rectas Sa y $A'a'$ determinará el punto buscado.

La índole especial de este escrito nos impide estudiar mas detenidamente las figuras en involucion.

Núm. 143. III. *Figuras homológicas.*=Imaginemos una figura cualquiera en el plano $LLJ'J'$ (*fig.* 61), y determinemos su perspectiva sobre el plano $IILL$, tomando un punto de vista arbitrario. Ambas figuras serán homográficas, y cumplirán con todas las condiciones ya expuestas; pero si hacemos girar el plano $IILL$ alrededor de LL, como en el caso precedente, hasta que coincida con el plano $J'J'LL$, dichas figuras estarán situadas en un mismo plano, la línea LL será comun á las dos, y por la posicion particular que ocupan una respecto á la otra, gozan de ciertas propiedades, y constituyen un grupo especial de la homografía, que recibe el nombre de *homología*, designándose ambos sistemas con la denominacion de *homológicos*.

Núm. 144. Cada dos puntos homólogos a, a'; b, b'..... están constantemente en línea recta con el punto de vista O en todas las posiciones del plano $LLII$; luego de la misma propiedad gozarán en el límite. De aquí se deduce que en las figuras homológicas cada dos puntos conjugados a, a' (*fig.* 63) están en línea recta con un cierto punto O.

La recta LL recibe el nombre de *eje de homología*, y el punto O se designa con el de *centro*. La primera es evidentemente la línea de tierra de la *fig.* 61; el segundo el límite del punto de vista O.

Todo punto (c, c') de la recta LL es doble, y pertenece á ambos sistemas; de suerte que la recta homóloga de una cualquiera ca del primer sistema pasará por dicho punto (c, c'), y será $c'a'$; ó dicho de otro modo: cada dos rectas homólogas ca, $c'a'$ se cortan sobre el eje LL, que tambien se designa por esta razon con el nombre de eje de concurso. Finalmente, el punto O es conjugado de sí mismo, y es por lo tanto doble.

Núm. 145. Conociendo el centro O, el eje LL y dos puntos correspondientes a, a'— que deben estar en una recta Oa',— nada mas fácil que determinar el punto b' de la segunda figura ó sistema, correspondiente á uno arbitrario b de la primera.

En efecto, el punto conjugado de b deberá estar en la recta Ob; por lo tanto ya conocemos una línea en la cual deberá hallarse dicho punto.

Por otra parte, si trazamos la recta ab, su conjugada se determinará fácilmente, puesto que conocemos el punto a' conjugado con a y el conjugado de c, que es *él mismo*. De aquí resulta que dicha recta será $c'a'$; pero en ella debe hallarse el punto b'; luego la interseccion b' de las rectas Ob y $c'a'$ será el punto buscado.

Núm. 146. Supongamos que una de las figuras sea el triángulo abc (*fig.* 64), y que se nos da el punto a', conjugado de a: determinando por el método precedente los b' y c' tendremos el triángulo $a'b'c'$, homológico con abc.

La posicion respectiva de ambos triángulos será la siguiente: los vértices se hallarán dos á dos sobre tres rectas concurrentes oa', ob', oc'; los lados concurrirán *dos* á *dos* sobre el eje LL.

Núm. 147. De aquí se deduce el siguiente *teorema*.

Cuando los vértices de dos triángulos se hallan sobre rectas concurrentes, los lados se cortan dos á dos sobre una recta, y recíprocamente.

Núm. 148. El teorema anterior puede generalizarse para dos polígonos cualesquiera.

Núm. 149. Las relaciones analíticas de la homología están comprendidas en las generales de los sistemas homográficos

$$x' = \frac{a\,x + b\,y + c}{\alpha\,x + \beta\,y + 1}\,;\quad y' = \frac{a'x + b'y + c'}{\alpha x + \beta\,y + 1}.$$

Supongamos que en estas fórmulas x é y, x' é y' estén referidas á los mismos ejes $o\,x$, $o\,y$, que supondremos sean el eje de concurso $L\,L$, y una recta cualquiera $O\,o$ que pase por el centro O.

Deberán cumplir dichas fórmulas con las siguientes condiciones.

1.ª Que cada punto de la recta $L\,L$ sea conjugado de sí mismo, y por lo tanto $L\,L$ conjugada con $L\,L$.

2.ª Que el punto O sea conjugado de sí propio.

Basta con estas condiciones para que cada dos puntos correspondientes a y a' estén en línea recta con O, puesto que las rectas conjugadas $O\,a$, $O\,a'$ tendrán dos puntos comunes, uno sobre $L\,L$, y otro el punto O.

1.º Para que $L\,L$ sea una recta doble, basta que á $y = o$ corresponda $y' = o$: la segunda de las fórmulas anteriores tomará la forma

$$y' = \frac{b'\,y}{\alpha\,x + \beta\,y + 1}.$$

En efecto sustituyendo

$$y' = o,\ y = o$$

en el valor de y', resultará

$$o = \frac{a'\,x + c'}{\alpha\,x + \beta\,y + 1},$$

ó bien

$$a'\,x + c' = o;$$

y como esta condicion debe verificarse para todos los valores de x, obtendremos

$$a' = o,\ c' = o.$$

2.° Puesto que para $y = o$, sea cual fuere el valor m de x, debe verificarse

$$x = m, \; x' = m,$$

resultará

$$m = \frac{a m + c}{\alpha m + 1},$$

ó bien

$$\alpha m^2 + (1 - a) m - c = o;$$

de donde

$$\alpha = o; \; 1 - a = o; \; c = o.$$

El valor de x' queda reducido á la forma

$$x' = \frac{x + b y}{\beta y + 1}.$$

3.° Representando por d la distancia $O o$, debemos tener para $x = o$, $y = d$, los valores $x' = o$, $y' = d$. Espresando estas condiciones en las dos fórmulas simplificadas

$$y' = \frac{b' y}{\beta y + 1}, \quad x' = \frac{x + b y}{\beta y + 1},$$

tendremos

$$d = \frac{b' d}{\beta d + 1}; \quad o = \frac{b d}{\beta d + 1};$$

de donde

$$b' = \beta d + 1; \quad b = o.$$

Resultará por fin

$$x' = \frac{x}{\beta y + 1}; \quad y' = \frac{(\beta d + 1) y}{\beta y + 1}. \qquad (1)$$

Núm. 150. Fácilmente se comprueban en las dos últimas fórmulas las condiciones de la homología.

En primer lugar dos puntos conjugados están en línea recta con el punto O. Basta para ello que se verifique

$$\frac{y-d}{x}=\frac{y'-d}{x'};$$

pero sustituyendo en vez de y' y x' sus valores, obtendremos

$$\frac{y-d}{x}=\frac{\frac{(\beta d+1)y}{\beta y+1}-d}{\frac{x}{\beta y+1}},$$

ó simplificando

$$\frac{y-d}{x}=\frac{y-d}{x}.$$

En segundo lugar, si en la ecuacion $x'=my'+n$ (2) del segundo sistema, sustituimos los valores de x' é y', obtendremos para la ecuacion de la recta conjugada

$$\frac{x}{\beta y+1}=m\frac{(\beta d+1)y}{\beta y+1}+n,$$

ó simplificando

$$x=[\beta(md+n)+m]y+n \ (3).$$

Fácilmente se ve que las rectas (2) y (3) cortan al eje de las x á la misma distancia n del origen; es decir, en un mismo punto.

Núm. 151. De las fórmulas (1) se deducen inmediatamente las correspondientes á la involucion (*Núm.* 137).

En efecto, para que la homología se convierta en involucion, basta que las rectas $I\,I$, $J'\,J'$ (*fig*. 61) se confundan.

Ahora bien, la ecuacion de la recta $I\,I$ se obtiene igualando á cero el denominador de los valores de x', y', de suerte que tendremos

$$\beta\,y+1=0$$

ó bien

$$y=-\frac{1}{\beta}.$$

Por otra parte, la ecuacion de $J'\,J'$ se deducirá despejando x é y de dichas ecuaciones generales, é igualando á cero el denominador, con lo cual resulta

$$y'=d+\frac{1}{\beta}.$$

Para que esta ecuacion y la precedente, ó mejor dicho, las rectas que representan, coincidan, es indispensable que tengamos

$$d+\frac{1}{\beta}=-\frac{1}{\beta}$$

ó bien

$$d+\frac{2}{\beta}=0.$$

Recordemos ahora que las ecuaciones del (*Núm*. 137) están referidas á un eje $o_1\,x_1$ (*fig*. 64), que pasa por el punto medio o_1 de $O\,o$, y tendremos, cambiando de origen y designando por $x_1\,y_1$ las nuevas coordenadas,

$$x_1=x\,;\quad y_1=y-\frac{d}{2}.$$

Sustituyendo en

$$x'=\frac{x}{\beta y+1}, \quad y'=\frac{(\beta d+1)y}{\beta y+1},$$

los valores

$$x'=x'_1\,;\,y'=y'_1+\frac{d}{2}\,;\,x=x_1\,;\,y=y_1+\frac{d}{2}\,;$$

tendremos

$$x'_1=\frac{x_1}{\beta y_1+\frac{\beta d}{2}+1}\,; \quad y'_1+\frac{d}{2}=\frac{(\beta d+1)\left(y_1+\frac{d}{2}\right)}{\beta y_1+\frac{\beta d}{2}+1}.$$

Simplificando y teniendo presente la condicion

$$d+\frac{2}{\beta}=0 \quad \text{ó} \quad \frac{d\beta}{2}+1=0,$$

resultará por último,

$$x'_1=\frac{-\frac{d}{2}x_1}{y_1}, \quad y'_1=\frac{\frac{d^2}{4}}{y_1},$$

formas idénticas á las del (*Núm.* 137), si se tiene en cuenta que en las *figuras* 62 *y* 64 es inversa la direccion del eje de las *y* y además se recuerda lo que en una y otra representa *d*.

XV.—*Figuras correlativas.*

Núm. 152. Imaginemos dos figuras A, A', enlazadas de modo que á cada punto de la primera, —a, por ejemplo,— corresponda sin ambigüedad una recta $a'\,a'$ en la segunda.

Para que esto se verifique, es claro que los coeficientes X, Y, U de la ecuacion de la recta $a'\,a'$, que representaremos por

$$Xx' + Yy' + U = o,$$

deberán ser funciones de las coordenadas x, y del punto a; pero entre todas las funciones, que dan un solo valor de X, Y, U para cada sistema de valores de x, y, escojamos y consideremos únicamente las funciones lineales: tendremos en esta hipótesis

$$X = a_1 x + a_2 y + a_3\ ;\ Y = b_1 x + b_2 y + b_3\ ;$$
$$U = c_1 x + c_2 y + c_3\ ;$$

y la ecuacion de la recta será

$$(a_1 x + a_2 y + a_3)\,x' + (b_1 x + b_2 y + b_3)\,y'$$
$$+ (c_1 x + c_2 y + c_3) = o.$$

La recta $a'\,a'$ recibe el nombre de *polar*, y el punto a el de *polo*.

Núm. 153. Supongamos para simplificar, que ambos sistemas se hallan en un mismo plano y se refieren á un mismo sistema de ejes, — x, y, ó bien x', y'.

Al punto a (*fig.* 65), cuyas coordenadas son x, y en el sistema A, corresponde en el sistema A' la polar $a'\,a'$, cuyas coordenadas variables hemos designado por x', y', y cuya ecuacion en x', y' es la dada en el número precedente.

Cada punto del primer sistema tiene pues una polar en el segundo.

Observemos ahora, que si fijamos sobre la polar $a'a'$ un punto m', sus coordenadas $x'_m\, y'_m$ deberán satisfacer á la ecuacion de la recta, y tendremos

$$(a_1 x + a_2 y + a_3)\, x'_m + (b_1 x + b_2 y + b_3)\, y'_m$$
$$+ (c_1 x + c_2 y + c_3) = o,$$

ó bien

$$(a_1 x'_m + b_1 y'_m + c_1)\, x + (a_2 x'_m + b_2 y'_m + c_2)\, y$$
$$+ (a_3 x'_m + b_3 y'_m + c_3) = o;$$

y podrá formularse esta cuestion:

¿Cuál será el lugar geométrico de los puntos del primer sistema, cuyas polares pasen en el segundo por el punto m'?

La ecuacion precedente espresa esta condicion, siempre que consideremos á x é y como variables; y puesto que dicha ecuacion es de primer grado, resulta que el lugar geométrico buscado es una línea recta $m\,m$ que pasa por a.

Núm. **154.** Ocurre todavía preguntar:

Si en vez de considerar el punto m' como perteneciendo á la recta $a'\,a'$, suponemos que pertenece á otra $b'\,b'$ cuyo polo sea b, ¿hubiéramos obtenido la misma recta $m\,m$?

Si representamos por $x_b\, y_b$ las coordenadas de b, es claro que la ecuacion de su polar será

$$(a_1 x_b + a_2 y_b + a_3)\, x' + (b_1 x_b + b_2 y_b + b_3)\, y'$$
$$+ (c_1 x_b + c_2 y_b + c_3) = o.$$

Ahora bien, puesto que $x'_m\, y'_m$ son las coordenadas del punto m' deberán satisfacer á la ecuacion precedente, y tendremos

$$(a_1 x'_m + b_1 y'_m + c_1)\, x_b + (a_2 x'_m + b_2 y'_m + c_2)\, y_b$$
$$+ (a_3 x'_m + b_3 y'_m + c_3) = o.$$

Esta ecuacion demuestra que el punto b está sobre la recta mm.

Es decir, que siempre al punto m' del segundo sistema corresponde la misma recta mm en el primero.

La ecuacion es de la forma

$$(a_1 x' + b_1 y' + c_1) x + (a_2 x' + b_2 y' + c_2) y$$
$$+ (a_3 x' + b_3 y' + c_3) = o,$$

y sus coeficientes son funciones de primer grado de las coordenadas del segundo sistema.

Hay por lo tanto cierta *reciprocidad de forma* en ambos sistemas: á cada punto del primero, corresponde una recta en el segundo, y á cada punto del segundo, una recta en el primero.

Los coeficientes de aquella son funciones de primer grado de x, y; los de esta son tambien funciones de primer grado de x', y'.

La reciprocidad no es sin embargo completa, porque los coeficientes de las funciones de primer grado, no son en general los mismos para las polares de ambos sistemas.

Núm. 155. De la *figura* 65 se deduce, que *cuando dos rectas $a'a'$, $b'b'$ de un sistema pasan por un punto m', sus polos a, b están en la polar mm de dicho punto m'.*

O más en general: si una recta $a'a'$ gira en uno de los sistemas alrededor de un punto m', su polo a se mueve sobre la polar de dicho punto.

Núm. 156. Hemos dicho ya como, dado un polo en uno de los sistemas, se determina la polar en el otro: basta para ello sustituir sus coordenadas, x é y por ejemplo, en los coeficientes X, Y, U de la polar, que de este modo se convertirán en coeficientes numéricos.

El problema inverso es tambien en estremo fácil.

Supongamos que se da la polar

$$px + qy + r = o$$

del primer sistema, y que se trata de hallar su polo en el segundo. Será suficiente identificar la ecuacion precedente con la general

$$(a_1 x' + b_1 y' + c_1) x + (a_2 x' + b_2 y' + c_2) y$$
$$+ a_3 x' + b_3 y' + c_3 = o$$

de las polares del primer sistema. Tendremos pues las dos ecuaciones de condicion

$$\frac{p}{r} = \frac{a_1 x' + b_1 y' + c_1}{a_3 x' + b_3 y' + c_3}; \quad \frac{q}{r} = \frac{a_2 x' + b_2 y' + c_2}{a_3 x' + b_3 y' + c_3};$$

de las que deduciremos las coordenadas x', y' del polo.

Núm. 157. Para que la relacion de dos sistemas quede perfectamente determinada, es decir, para que dada una figura cualquiera en el *uno* se determine sin ambigüedad ni duda la figura correspondiente en el otro, basta y es necesario que se conozcan las *ocho* constantes

$$\frac{a_1}{c_3}, \frac{a_2}{c_3}, \frac{a_3}{c_3}, \frac{b_1}{c_3}, \frac{b_2}{c_3}, \frac{b_3}{c_3}, \frac{c_1}{c_3}, \frac{c_2}{c_3}$$

de la ecuacion general

$$(a_1 x + a_2 y + a_3) x' + (b_1 x + b_2 y + b_3) y'$$
$$+ (c_1 x + c_2 y + c_3) = o.$$

De aqui resulta que dadas cuatro polares

$$AB, \; BC, \; CD, \; DA$$

(*fig.* 66) del primer sistema, y sus polos *a, b, c, d* en el segundo, la relacion de ambos sistemas queda perfectamente definida.

En efecto, representemos por

$$\left.\begin{array}{r} px + qy + r = o \\ p'x + q'y + r' = o \\ p''x + q''y + r'' = o \\ p'''x + q'''y + r''' = o \end{array}\right\} \text{las ecuaciones de las polares} \left\{\begin{array}{l} AB \\ BC \\ CD \\ DA. \end{array}\right.$$

Designemos asimismo por

$$\left.\begin{matrix} x_a\ y_a \\ x_b\ y_b \\ x_c\ y_c \\ x_d\ y_d \end{matrix}\right\}$$ las coordenadas de los cuatro polos a, b, c, d.

Para que a sea el polo de AB, deben verificarse las condiciones (*núm.* 156)

$$\frac{p}{r} = \frac{a_1 x_a + b_1 y_a + c_1}{a_3 x_a + b_3 y_a + c_3}; \quad \frac{q}{r} = \frac{a_2 x_a + b_2 y_a + c_2}{a_3 x_a + b_3 y_a + c_3}$$

y del mismo modo, para que b, c y d sean los polos de

BC, CD y DA

deberán verificarse las seis ecuaciones de condicion:

$$\frac{p'}{r'} = \frac{a_1 x_b + b_1 y_b + c_1}{a_3 x_b + b_3 y_b + c_3}; \quad \frac{q'}{r'} = \frac{a_2 x_b + b_2 y_b + c_2}{a_3 x_b + b_3 y_b + c_3}$$

$$\frac{p''}{r''} = \frac{a_1 x_c + b_1 y_c + c_1}{a_3 x_c + b_3 y_c + c_3}; \quad \frac{q''}{r''} = \frac{a_2 x_c + b_2 y_c + c_2}{a_3 x_c + b_3 y_c + c_3}$$

$$\frac{p'''}{r'''} = \frac{a_1 x_d + b_1 y_d + c_1}{a_3 x_d + b_3 y_d + c_3}; \quad \frac{q'''}{r'''} = \frac{a_2 x_d + b_2 y_d + c_2}{a_3 x_d + b_3 y_d + c_3}.$$

De estas ocho ecuaciones de condicion se deducirán facilmente las ocho constantes buscadas.

Núm. 158. *Teorema.* La relacion anarmónica de cuatro rectas concurrentes de un sistema, es igual á la relacion anarmónica de los cuatro puntos conjugados, que evidentemente se hallarán en línea recta.

Demostracion. Sean a, b, c, d (*fig.* 67) los cuatro puntos, y

$$Sa',\ Sb',\ Sc',\ Sd'$$

las cuatro polares.

Tomemos la recta $abcd$ por eje de las x; y supongamos que corta en a', b', c', d' á las cuatro polares.

Para los cuatro puntos a, b, c, d la ordenada y es nula; luego las ecuaciones de las cuatro polares estarán comprendidas en la forma

$$(a_1x' + b_1y' + c_1)\,x + a_2x' + b_2y' + c_2 = o,$$

y bastará para obtener dichas ecuaciones sustituir por x los valores

$$x = oa,\ x = ob,\ x = oc,\ x = od.$$

Por otra parte, las abscisas oa', ob', oc', od' de los puntos en que las cuatro polares cortan al eje de las x, se obtienen igualando y' á cero; por lo tanto la ecuacion que las determine quedará reducida á la forma

$$(a_1x' + c_1)\,x + a_2x' + c_2 = o,$$

de donde

$$x = -\frac{a_2x' + c_2}{a_1x' + c_1}.$$

Esta ecuacion dará para

$$x' = oa',\ x = oa,$$

para

$$x' = ob',\ x = ob;$$

para

$$x' = oc',\ x = oc;$$

y por último, para

$$x' = od',\ x = od.$$

Pero esta es precisamente la relacion homográfica del (*Núm.* 44); luego

$$R_a(a, b, c, d) = R_a(a', b', c', d') = R_a(\text{haz } S).$$

Núm. 159. Del teorema anterior se deduce un método gráfico para determinar en uno de los sistemas una recta ó un punto correspondiente á un punto ó á una recta del otro, dándose cuatro polares A, B, C, D de uno de dichos sistemas, y sus polos respectivos a, b, c, d.

Sean A, B, C, D cuatro polares del primer sistema, y a, b, c, d sus polos (*fig.* 68).

1.° *Dado un punto Q en el primer sistema, determinar su polar en el segundo.*

Imaginemos el haz $SMNPQ$, que se obtiene uniendo uno de los vértices del cuadrilátero formado por las cuatro polares, á los otros tres puntos de interseccion y al punto dado Q.

El polo de SM es a;
el de SN es n, interseccion de ad polar de S y de bc polar de N (*Núm.* 155);
y el de SP es d;
luego determinando sobre la recta nad un punto q de tal suerte que

$$R_a(\text{haz } SMNPQ) = R_a(a, n, d, q)$$

el punto q será el polo de SQ.

Escogiendo otro punto cualquiera, N por ejemplo, para vértice del cuadrilátero, hallaremos q_1 polar de NQ, y la recta qq_1 será la polar buscada.

2.° Dada una polar QR, hallar su polo.

Buscando las polares qq_1 y rr_1 de dos de sus puntos Q y R, el punto de interseccion t de dichas polares será el punto buscado.

Pueden simplificarse los métodos anteriores, pero el principio y la marcha general son siempre los que acabamos de exponer.

Núm. 160. Las figuras que gozan de las propiedades expuestas, á saber:

1.ª Que á cada recta de la primera corresponde un punto en la segunda, y recíprocamente;

2.ª Que las relaciones anarmónicas de cuatro polares concurrentes son iguales á las de los cuatro polos; reciben el nombre de *Figuras correlativas.*

XVI.— *Figuras homográficas en involucion, etc., situadas en el espacio.*

Núm. 161. Las teorías de los párrafos anteriores pueden generalizarse sin dificultad para las figuras situadas en el espacio; pero, por una parte los límites en que debemos encerrar este trabajo nos impiden extendernos más sobre este punto, y por otra, la perfecta analogía que entre aquellas y estas teorías existe, hacen innecesarios nuevos desarrollos y más amplias explicaciones.

SEGUNDA PARTE.

Aplicaciones.

I.

Núm. 162. El objeto de esta segunda parte es presentar algunos ejemplos que hagan comprender la importancia de las teorías precedentes, y su gran fecundidad como métodos de investigacion.

II.—*Polos y polares de las cónicas.*

Primer lema. Dado en un plano pp' (*fig.* 69) un sistema de rectas concurrentes Ab, Ab', Ab''....., si proyectamos dicho sistema sobre otro plano PP', escogiendo el centro de proyeccion O sobre una paralela AO á dicho plano PP', es evidente que las proyecciones bB, $b'B'$, $b''B''$.... de las rectas dadas Ab, Ab', Ab''..... serán parelelas entre sí y á la recta OA.

Y en efecto, un sistema de planos AbB, $Ab'B'$, $Ab''B''$ que pasan por una recta OA son cortados por otro paralelo á dicha recta, segun un sistema de paralelas á ella.

Este teorema nos da medio de transformar por la perspectiva un sistema de rectas concurrentes en otro de rectas paralelas.

Reciprocamente, si consideramos á Bb, $B'b'$, $B''b''$.....
como un sistema de rectas paralelas, y á pp' como un plano de proyeccion, las proyecciones de $Bb, B'b', B''b''$..... serán rectas concurrentes en un punto A que se obtendrá trazando por el punto de vista O una paralela OA á las rectas dadas, y determinando su interseccion con el plano pp'.

Aplicando este teorema podremos transformar un sistema de rectas paralelas en otro de rectas concurrentes.

Observacion. Si en vez de un sistema de rectas concurrentes tenemos dos (*fig.* 70), y representamos por a y a' los dos puntos de concurso, haciendo pasar por un punto de vista arbitrario O y por la recta aa' un plano, y tomando el del cuadro PP paralelo á este, es claro que las rectas Oa, Oa' serán paralelas á dicho plano del cuadro, y le encontrarán en el infinito: así pues, tanto las proyecciones de las rectas que concurren en a como las de las que concurren en a', serán paralelas.

Hay pues siempre medio de transformar dos sistemas concurrentes en dos sistemas paralelos, y recíprocamente.

Núm. 163. *Segundo lema.* Dado un sistema rectilíneo $abcd$ (*fig.* 71), de cuatro puntos en relacion armónica, si se proyectan cónicamente sobre un plano PP', pero de tal modo que una de las rectas proyectantes, —Od por ejemplo,— sea paralela al plano, el punto D, proyeccion del d, estará en el infinito de la recta ABC; y puesto que la relacion armónica es proyectante, los puntos $ABCD$ formarán un sistema armónico. De aquí se deduce que el punto B conjugado de D, es decir del infinito, es el punto medio de la recta AC.

Reciprocamente, si proyectamos sobre un plano pp' cuatro puntos A, B, C, D, en los cuales B es el punto medio de AC y D se halla en el infinito, los cuatro puntos a, b, c, d formarán un sistema armónico.

Núm. 164. *Consecuencia.* Por medio de este principio podremos transformar cuatro puntos en relacion armónica en otros cuatro, tres de ellos formando segmentos iguales, y el cuarto en el infinito.

Recíprocamente, dados cuatro puntos en estas últimas condiciones, siempre podremos transformarlos en un sistema armónico.

Núm. 165. *Teorema.* Dada una cónica C (*fig.* 72), y un punto O en su plano, si por dicho punto trazámos una série de secantes Oa, Oa', Oa''..... que corten á la cónica; y en cada una de ellas —Oa por ejemplo— buscamos el punto p conjugado armónico del O por relacion á los puntos a, b, intersecciones de la secante y la cónica, el lugar geométrico de tales puntos p, p', p''..... será una recta QQ'.

Demostracion. Proyectemos el sistema completo (*fig.* 73), formado por la cónica c, las secantes Oa, Oa'..... y el punto O sobre un plano RR, eligiendo el punto de vista V sobre una recta OV, paralela á dicho plano RR.

La cónica c se proyectará segun otra cónica C:

las secantes concurrentes Oa, Oa'..... segun rectas paralelas AB, $A'B'$.....;

el punto O en el infinito del plano RR;

y los puntos p, p'..... en los puntos medios P, P' de las cuerdas AB, $A'B'$.....

Pero sabemos que el lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas de una cónica es un diámetro conjugado con dichas cuerdas, luego los puntos p, p'..... estarán tambien en línea recta.

Núm. 166. *Definicion.* La recta qq' así formada se dice que es la *polar* del punto O; y recíprocamente, el punto O se dice que es el *polo* de la recta qq'.

Núm. 167. *Determinacion de la polar dado el polo.* Puesto que se trata de determinar una línea recta, basta en rigor trazar dos secantes, determinar sobre ellas los puntos correspondientes p, p', y unir ambos puntos por una recta; pero es fácil simplificar esta construccion por alguno de los métodos siguientes. Examinaremos á este fin dos casos.

Núm. 168. *Primer caso: cuando el polo es esterior á la curva* (*fig.* 74). Si desde el polo P trazamos dos tangentes Pt, Pt' á la cónica, es evidente que cada una de ellas puede ser considerada como el límite de la secante Pa'' al convertirse esta en tangente. Ahora bien, cuando los puntos $a''b''$

se confunden en uno t, el punto p'' se confunde tambien con t; luego tanto el punto t como el t' son puntos de la polar. Basta segun lo dicho para determinar esta, dado el polo exteriormente, trazar desde P dos tangentes Pt, Pt' á la cónica, y unir los puntos t y t': la recta XX' será la polar.

Núm. 169. Dedúcese de aquí el siguiente

Teorema. Si en una cónica tenemos una cuerda tt', el diámetro conjugado AB y las tangentes tP, $t'P$, los cuatro puntos A, Q, B y P, forman un sistema armónico.

Núm. 170. *Otro método.* Se sabe por Analítica, que la cuerda tt' es paralela al diámetro CD conjugado con OP, y tambien á la tangente BT; luego basta obtener un punto de la polar y por este punto trazar XX' paralela á CD ó á BT.

El punto que escojamos puede ser el correspondiente al diámetro OP, para lo cual deberemos buscar sobre OP un punto Q conjugado armónico de P por relacion á AB.

Núm. 171. De aquí se deduce tambien el siguiente

Teorema. Cuando el polo en una cónica es exterior (luego veremos que la proposicion es general), la direccion de la polar es la del diámetro conjugado con la recta que une el centro al polo.

Núm. 172. *Segundo caso: cuando el polo es exterior.* En esta hipótesis el método anterior cae en defecto, porque no pueden trazarse las dos tangentes, pero puede sustituirse por el siguiente.

Sea (*fig.* 75) P el polo: trazemos por él el diámetro AB y la cuerda conjugada aa', y busquemos sobre esta secante el punto correspondiente de la polar, para lo que deberemos determinar un punto conjugado armónico de P por relacion á aa'. Ahora bien, P es el punto medio de aa', luego el conjugado se halla en el infinito de aa'. De aquí resulta que la polar buscada corta á la cuerda aa' en el infinito, ó es paralela á ella. Basta pues determinar un punto de la polar y por él hacer pasar una paralela á aa'.

Escojamos para secante el diámetro OP, y busquemos el punto Q conjugado de P por relacion á AB. A este fin bastará (*Núm.* 169) trazar aQ tangente á la cónica. El punto Q pertenecerá á la polar.

Núm. 173. Las consideraciones precedentes prueban la generalidad del teorema del *Núm.* 171.

Núm. 174. *Observacion importante.* Cuando el polo P (*figura* 76) es interior á la cónica, toda secante Pa la corta, y á toda secante corresponde pues un punto Q de la polar. Dedúcese de aquí, que si consideramos un punto cualquiera Q de dicha línea, por él pasará una recta que cortará á la cónica, y por consiguiente dicho punto estará comprendido en la definicion general. La polar se obtendrá en toda su extension haciendo variar la secante, desde PX paralela á QQ' hasta PX' prolongacion de PX.

No sucede lo mismo cuando el punto P (*fig.* 77) es exterior, porque entonces solo las secantes comprendidas entre Pa y Pa' cortan á la curva, y solo los puntos de la polar comprendidos entre a y a' cumplen con las condiciones de la *definicion.*

No obstante, si generalizamos ciertas definiciones, si tenemos en cuenta los puntos imaginarios de interseccion de la curva y de las secantes Pa''....., y además admitimos relaciones armónicas de segmentos imaginarios, veremos fácilmente que todos los puntos a''..... de la recta aa' cumplen con la definicion de la polar.

Núm. 175. *Determinacion del polo dada la polar: primer caso.* Cuando la polar corte á la curva, bastará, segun el teorema *Núm.* 169, trazar por los puntos de interseccion t, t' (*fig.* 74) las tangentes tP, $t'P$. El punto de interseccion P será el polo.

Segundo caso. Cuando la polar sea exterior á la cónica, se trazará el diámetro OQ (*fig.* 75), conjugado con la polar XX': desde el punto de interseccion de ambas líneas se tirarán las tangentes Qa, Qa', y el punto en que la cuerda aa' corta al diámetro OQ será evidentemente el *polo buscado.*

Núm. 176. Si en una *cónica* se hace variar el polo, resulta de lo que precede, que la polar variará tambien, y recíprocamente. Así pues, el polo y la polar son dos elementos enlazados por cierta ley geométrica, de tal suerte que el *uno* determina al *otro*, como en una ecuacion que enlaza dos variables x, y, á cada valor de la primera corresponde un valor de la segunda, y recíprocamente.

Basta fijar el polo para fijar la polar; basta que varie aquel para que varie esta; y podemos decir, —continuando nuestra comparacion,— que así como en una ecuacion con dos variables entran parámetros, y que al cambiar estos de valor, no se altera la naturaleza de la ley que enlaza ambas variables, pero que sin embargo se alteran sus valores absolutos, así en el caso presente, la *cónica* es una especie de *sistema-parámetro*, que al variar no modifica ni altera la ley de dependencia que existe entre el polo y la polar, pero que modifica la posicion de ambos elementos geométricos.

Las leyes que enlazan la polar y el polo son las mismas para todas las cónicas; pero en cada caso, la polar y el polo toman posiciones diversas.

Núm. 177. Estudiemos, siquiera sea rápidamente, esta *ley de variabilidad*.

Sea C una cónica (*fig.* 78), que para fijar las ideas supondremos que tiene centro. Facilmente podríamos hacer extensivas á la parábola las consecuencias que obtengamos.

Tracemos por el centro O un diámetro OX, y supongamos que sobre él se mueve un punto P, que consideraremos como polo de la cónica: veamos cómo varia la polar á medida que camina el polo sobre el diámetro fijo.

Es evidente (*Núm.* 171) que su direccion será constante, es decir, que será paralela al diámetro conjugado con OX; y solo resta determinar la distancia al centro del punto en que corta á dicho diámetro.

1.° Cuando el polo coincide con el centro, el punto conjugado armónico con relacion á AB será el situado en el infinito, puesto que $OA = OB$. Así:

La polar del centro en una direccion dada OX es una recta situada en el infinito, y cuya direccion es la del diámetro conjugado con OX.

El centro puede decirse que tiene infinitas polares: la polar será paralela á BT si la direccion elejida es OX; paralela á $B'T'$ si la direccion es OB'; etc.

2.° Si el polo se separa del centro á una distancia infinitamente pequeña OP, el punto conjugado P' se hallará á una distancia infinitamente grande de O. En efecto, puesto que los cuatro puntos A, P, B, P', están en relacion armónica, tendremos, prescindiendo del signo,

$$\frac{PA}{PB} : \frac{P'A}{P'B} = 1;$$

de donde se deduce

$$\frac{P'A}{P'B} = \frac{PA}{PB};$$

pero PA y PB son casi iguales, luego

$$\frac{PA}{PB}$$

difiere infinitamente poco de la unidad, y otro tanto podremos decir de

$$\frac{P'A}{P'B}:$$

así, representando por α una cantidad sumamente pequeña tendremos,

$$\frac{P'A}{P'B} = 1 + \alpha,$$

ó bien

$$P'A = P'B + P'B.\alpha,$$

y tambien

$$P'B + AB = P'B + P'B.\alpha,$$

ó

$$AB = P'B.\alpha,$$

de donde

$$P' B = \frac{AB}{\alpha};$$

que es una cantidad muy grande, toda vez que AB es cantidad finita y α es muy pequeña.

3.° A medida que el punto P se aleja del centro, el punto P' se aproxima; pero mientras P sea *interior á la cónica*, toda la polar será exterior. En efecto, el punto P' será exterior, y la polar, paralela á BT, no podrá cortar á la curva.

4.° Cuando el punto P llega á B, el punto P' se confunde tambien con dicho punto B. Basta para convencerse de ello observar que si en la relacion

$$\frac{PB}{PA} = -\frac{P'B}{P'A}.$$

suponemos

$$PB = o,$$

resultará

$$P' B = o.$$

Se deduce de aquí que *la polar de un punto situado sobre la cónica, es la tangente á la cónica en dicho punto.*

5.° Si el polo continua variando sobre la recta BX, la polar, conservando siempre la direccion BT, cortará al diámetro en puntos comprendidos entre B y O, y á medida que el polo se aleja, el punto de interseccion de la polar y el diámetro se acerca al centro.

Como los dos puntos A, B (*fig.* 75), un polo cualquiera P, y el punto Q en que la polar correspondiente corta al diámetro, constituyen un sistema armónico, si á la polar QX corresponde el polo P, á la polar Pa corresponderá el polo Q: *las rectas* QX *y* Pa *son polares recíprocas.*

6.° Cuando el polo varia desde el centro O (*fig.* 78) hasta el infinito, en el sentido OA, demostraríamos facilmente que la polar se mueve desde el infinito hasta el centro, coincidiendo, ó cruzándose, polo y polar en A.

En resumen:

Si el polo está comprendido,

1.° Entre O y B, la polar será exterior, y estará comprendida entre BT y el infinito.

2.° Si entre B y el infinito, la polar corta á la curva y se halla entre BT y OI.

3.° Si entre O y A la polar será exterior, y estará comprendida entre AT' y el infinito.

4.° Y por último, si el polo está entre A y el infinito, la polar se hallará entre AT' y OI.

Facilmente podríamos repetir para otro diámetro cualquiera lo dicho para OB.

Núm. 178. Antes de pasar más adelante debemos demostrar un teorema que nos ha de ser de gran ayuda en la teoría que estamos exponiendo.

Teorema. El polo y la polar son proyectivos.

Puesto que la definicion del polo y de la polar se funda únicamente en la relacion armónica, y esta es proyectiva (*Núm.* 61), se deduce que si dada una cónica c (*fig.* 79), su polo o, y su polar pp, se proyecta el sistema entero sobre un plano cualquiera, cónica ó cilíndricamente, el punto O y la recta PP, proyecciones de o y de pp, serán polo y polar de la cónica C, proyeccion de c.

O dicho abreviadamente: *el polo y la polar de la proyeccion son las proyecciones del polo y de la polar.*

Y en efecto, si trazamos en el plano de la cónica c una secante ob que pase por el polo, y proyectamos los cuatro puntos o, a, d, b, sus proyecciones O, A, D, B formarán un sistema armónico, y el punto D, proyeccion de d, pertenecerá á la polar del punto O; pero como otro tanto puede decirse de todas las secantes que pasan por o y de sus proyecciones, resulta finalmente que PP, proyeccion de pp, es la polar de C.

Núm. 179. *Teorema.* Dada una cónica C (*fig.* 80), y un punto O en su plano, si se trazan dos secantes cualesquiera Ob, Ob', y se unen dos á dos los cuatro puntos de interseccion a, a', b, b' con la curva, las rectas aa', bb', y ab', $a'b$ se cortarán en dos puntos c, c' situados sobre la polar del punto O, y por lo tanto el lugar geométrico de dichos puntos es una línea recta.

Demostracion. Transformemos el sistema formado por la cónica y el punto, sirviéndonos de proyecciones cónicas ó cilíndricas, de manera que el punto O se traslade al infinito (*Núm.* 162). En este caso las secantes AB, $A'B'$, proyecciones de ab, $a'b'$, serán paralelas; y se sabe por la teoria de las curvas de segundo grado, que AB' y $A'B$ como tambien AA' y BB' se cortan sobre el diámetro PP conjugado con la direccion AB.

Dicho diámetro será por consiguiente la proyeccion del lugar geométrico buscado, lo cual prueba que este lugar geométrico es una recta. Además PP es la polar del punto del infinito situado en la direccion BA, luego pp es la polar de O (*Núm.* 178).

Observacion. Aún pudiéramos simplificar la demostracion, transformando el sistema de modo que no solo las rectas concurrentes en O sino las que se cortan en c' fuesen paralelas (*Núm.* 162).

Núm. 180. *Nuevo método para hallar la polar dado el polo.* Dedúcese del teorema anterior, que dado el polo O, para hallar la polar basta trazar dos secantes Ob, Ob' y las cuerdas aa', bb', ab', $a'b$: los puntos de interseccion c, c' de estas cuerdas determinan inmediatamente la polar.

Núm. 181. *Teorema.* Dada una recta pp' en el plano de una cónica (*fig.* 81), si desde un punto cualquiera a se trazan dos tangentes at, at' y se unen los puntos de contacto, la recta así obtenida pasará por el polo o de dicha recta pp'.

Demostracion. Transformemos la cónica y la recta por el método de las proyecciones cónicas, de suerte que el punto a se traslade al infinito: es evidente que las proyecciones AT, $A'T'$, y PP' de las tres rectas at, at', y pp' serán paralelas; pero el diámetro TT' pasa por el polo O de PP' (*Núm.* 171), luego tt' pasará por el polo o de pp': con lo cual queda demostrado el teorema.

Núm. **182.** *Nuevo método para hallar el polo dada la polar.*

Sea AB (*fig.* 82) la polar y C la cónica: se trazarán por dos puntos cualesquiera A y B dos pares de tangentes AT, AT'; BS, BS', y el punto O en que se cortan las cuerdas TT', SS' será el polo buscado.

Núm. **183.** Dedúcese de la teoría expuesta la siguiente proposicion.

Si dos ó más rectas OA, OB, OC..... (*figs.* 83 *y* 84), situadas en el plano de una cónica, pasan por un punto O, los polos de dichas rectas estarán sobre la polar del punto.

Primer caso. Que el punto O sea exterior á la cónica (*fig.* 83).

Si desde el punto O trazamos dos tangentes Ot, Ot', la recta tt' pasará (*Núm.* 181) por el polo de OA, puesto que O se halla sobre la recta OA; pero otro tanto podemos decir de OB, OC..... luego la recta tt' pasa por los polos de todas las rectas dadas; ó de otro modo, sobre dicha recta se hallan los polos de las rectas OA, OB, OC..... Ahora bien, la recta tt' es (*Núm.* 168) la polar de O; luego el teorema queda completamente demostrado en este primer caso.

Segundo caso. Que el punto O sea interior (*fig.* 84).

Sea OA una de las rectas dadas, y a, a' los puntos en que corta á la cónica: tracemos las tangentes as, $a's$, y representemos su punto de interseccion por s.

Este punto s será (*Núm.* 175) el polo de AO, y estará situado sobre la polar de O: pero otro tanto podemos decir de OB, OC.....; luego la polar de O contiene los polos de las rectas concurrentes OA, OB, OC.....

Núm. **184.** *Otra demostracion.* Transformando el sistema de modo que las rectas concurrentes sean paralelas, tendremos (*fig.* 85) una cónica DD', proyeccion de la dada, y una série de paralelas A', B', C'..... (proyecciones de OA, OB, OC..... *figs.* 83 *y* 84). Los polos de todas estas paralelas se hallan sobre el diámetro DD' conjugado con la direccion A', y dicho diámetro es la polar del infinito (proyeccion de O) en la direccion A'; luego los polos de OA, OB, OC..... se hallan en la polar de O.

Núm. 185. La proposicion anterior puede tambien enunciarse de este modo.

Cuando en el plano de una cónica gira una recta alrededor de uno de sus puntos, el polo variable de esta recta se mueve sobre la polar del centro de giro.

Núm. 186. Consecuencia natural de dicha proposicion es esta otra:

Si P y P' (*fig.* 86) son los polos de dos rectas pp, $p'p'$, su punto de interseccion a será el polo de la recta PP'.

En efecto, cuando la recta pp gira al rededor de a, su polo P se mueve sobre la polar de a; luego cuando pp llegue á la posicion $p'p'$, su polo P' estará en la polar del punto de giro a; es decir, que PP' será la polar del punto en que se cortan las dos rectas dadas.

Núm. 187. Determinemos en el plano de una cónica C (*figura* 87), un polo P y su polar pp. Si tomamos sobre esta última un punto cualquiera a, la polar correspondiente Pb pasará (*Núm.* 186) por el punto P. Ahora bien, la recta Pa pasa por los puntos P y a, polos de pp y Pb; luego Pa será la polar del punto b, interseccion de dichas dos rectas.

Así pues, los puntos a, b y las rectas Pb, Pa son sistemas conjugados recíprocos, es decir, b es polo de Pa, y a es polo de Pb.

Si la recta Pa gira alrededor de P, determinando sobre pp los puntos a, a', a'', a'''..... la Pb girará al mismo tiempo, determinando los puntos correspondientes b, b', b'', b'''..... De este modo sobre la recta pp tendremos dos sistemas de puntos, a, a', a''.....; b, b', b''..... que dos á dos se corresponden recíprocamente: y decimos recíprocamente, porque cuando Pa llegue, por ejemplo, á Pb, el punto conjugado b coincidirá con a.

Esta circunstancia, y el tratarse de relaciones analíticas que deben ser puramente algebráicas, nos indican ya que los puntos a, b; a', b'; a'', b''..... deben formar sobre pp una *involucion.*

Núm. 188. Podemos demostrar directamente este importantísimo teorema.

Transformemos á este fin la cónica en una circunferencia O (*fig*. 88); P y pp serán un polo y la polar del círculo; y a y Pb, b y Pa formarán asimismo dos sistemas, compuesto cada uno de un polo y su polar, pero hallándose el polo de Pb sobre la recta Pa, y el polo de Pa sobre la recta Pb.

En una palabra, el nuevo sistema es en su esencia idéntico al primitivo, sin más variaciones que la de haber sustituido á la cónica la circunferencia.

Si para este caso queda demostrado el teoréma, estará demostrado en general, puesto que los sistemas en involucion són proyectivos.

La perpendicular Ob á la recta Pa pasa por el polo de esta recta, luego pasa por b.

Por otra parte, la recta OP es perpendicular á la polar pp, de suerte que los triángulos PQa y ObQ son semejantes, por ser ambos rectángulos, y tener iguales los ángulos aPQ y ObQ, cuyos lados son perpendiculares.

De aquí se deduce

$$aQ : QP :: OQ : bQ$$

ó bien

$$aQ \times bQ = OQ \times OP = constante.$$

Vemos, pues, que los puntos a, b..... forman una involucion cuyo centro será el punto Q.

Facilmente se comprueba que Q es el centro, observando que cuando a está en el infinito su polar es OQ, y que por lo tanto el infinito y Q son puntos conjugados.

La demostracion es la misma para el caso en que el polo P sea exterior (*fig*. 88 *bis*).

III.—*Centro y ejes de la curva interseccion de un cono de segundo grado con un plano.*

Núm. **189.** Sea un cono de segundo grado (*fig.* **89**), definido por su vértice S y una cónica C.

Sea opp un plano que corta á dicho cono, y propongámonos hallar el centro o y los ejes de la cónica interseccion.

1.° *Centro.* Si por el vértice S trazamos un plano SPP paralelo al plano secante, y determinamos la interseccion PP de este plano con el de la cónica C, así como el polo O de esta recta; proyectando sobre el plano opp desde el vértice S el punto O, la proyeccion o será el centro buscado.

En efecto: O y PP son polo y polar de la cónica C; luego sus proyecciones sobre el plano secante serán polo y polar de la cónica c: pero PP está en un plano SPP paralelo á opp y por lo tanto se proyecta en el infinito; luego el punto O se proyectará en el centro o de c, que es el polo del infinito.

2.° *Ejes.* Sean oa' y ob' dos diámetros conjugados de c: tracemos Sa paralela á oa' y Sb paralela á ob', y hagamos pasar por SO, Sb un plano, y por SO, Sa otro: las rectas Oa, Ob serán las proyecciones de los diámetros conjugados oa', ob' sobre el plano de la base.

Ahora bien, el polo de oa' se halla sobre ob' y en el infinito, luego Sb pasa por dicho polo: de aquí resulta que b es el polo de Oa, puesto que b y Oa son las proyecciones sobre el plano de la base de *el infinito* de ob' y de la recta Oa'. Análogamente a será el polo de Ob.

Dedúcese de lo dicho que Oa y Ob son polares recíprocas, y la cónica, el punto O, la polar PP, la rectas Oa, Ob, y los puntos a y b se hallan en el mismo caso que los elementos análogos de la *figura* 87 (*Núm.* 187): otro tanto podremos repetir para todos los sistemas de diámetros conjugados oa'', ob''..... de c.

Los puntos a, b..... formarán una involucion, y su centro se hallará facilmente trazando el diámetro CO y prolongándolo hasta que corte á PP: el punto B será dicho centro. En efecto, cuando el punto a esté en el infinito de PP, la polar será el diámetro CO, que es el conjugado con la direccion PP, puesto que es el que pasa por el polo O.

En resúmen, trazando por S paralelas á cada par de diámetros conjugados de la cónica c, los puntos a, b..... formarán sobre PP una involucion cuyo centro será B.

Entre estos diámetros debemos buscar los que formen ángulo recto, porque estos serán los ejes; luego el problema queda reducido á determinar en la involucion B dos puntos conjugados, tales que uniéndolos con el vértice S, las líneas así trazadas formen ángulo recto (*Núm.* 105).

Núm. 190. En el caso que indica la *figura* 89 las construcciones se reducen á lo siguiente:

1.° Trácese por S el plano SPP paralelo al plano secante, y determínese su interseccion PP con el de la base.

2.° Hállese el polo O de la recta PP por relacion á la cónica C.

3.° Trácese la recta arbitraria Oa, y determínese su polo b.

4.° Unanse los puntos C y O, y prolónguese la recta CO hasta que corte en B á PP.

5.° Descríbase en el plano SPP y sobre ab como diámetro, la semicircunferencia aDb y la recta BD, perpendicular en B á PP.

6.° Unase el punto D al S, y por el punto medio E levántese EF perpendicular sobre SD.

7.° Desde F, interseccion de PP y EF, con $FS = FD$ por rádio, descríbase una semicircunferencia $\alpha S \beta$.

Uniendo S á los puntos α, β, y trazando paralelas á las rectas $S\alpha$, $S\beta$, por o, estas paralelas serán los ejes.

Observaciones. 1.ª Si la involucion fuese de primer género, solo variaria el método para hallar los puntos α y β.

2.ª Las construcciones que se efectúan en el plano SPP pueden efectuarse en el Opp, porque resultarán figuras semejantes á las que por el método anterior hemos obtenido.

3.ª Sin dificultad se hacen extensivos los métodos anteriores al caso de un cilindro.

IV.—*Teorema de Desargues.*

Núm. 191. He aquí el enunciado del importantísimo y fecundo *teorema* de este gran geómetra francés.

Sean: A....... una cónica (*fig.* 90);

P.,..... un punto situado en el interior de la curva;

pp'..... la polar de P;

a y b... dos puntos conjugados recíprocos, de suerte que Pb será la polar de a, y Pa la polar de b.

Fijemos, por ejemplo, sobre la recta Pa dos puntos D, D' en relacion armónica con P y a; y considerando á dichos puntos como los puntos dobles de una involucion, el centro será el punto medio O del segmento DD', y P, a formarán parte del sistema (*Núm.* 87).

Adviértase que hasta aquí los pares de puntos a, b y D, D' son arbitrarios, é independientes entre sí. Pudiéramos en efecto, en vez de tomar D, D', elegir otros dos puntos en relacion armónica con P y a, puesto que hay infinitos sistemas sobre Pa que gozan de dicha propiedad; pudiéramos asimismo comenzar tomando a', b'; a'', b''..... en vez de a, b.

Sin embargo, una vez escogidos los puntos a, b, D y D', y por lo tanto las rectas pp', Pb, Pa, y la involucion O, todos estos elementos quedan invariables en el resto del enunciado.

Hemos dicho que escojíamos dos puntos D, D' como puntos dobles, y en rigor esto no es otra cosa que definir la involucion por medio de sus puntos dobles; pero es evidente que podríamos haber dicho: «escojamos una involucion arbitraria sobre Pa, de modo que P y a sean puntos conjugados,» sin que por esto el enunciado del teorema fuese distinto del que vamos á explicar.

Hechas estas observaciones, continuemos.

Sean c, c' un par de puntos de la involucion O (que podrán obtenerse trazando sobre DD' la semicircunferencia DsD'; desde un punto arbitrario c la tangente cs; y desde s la perpendicular sc' sobre Pa): por el punto c, exterior á la curva, tracemos la tangente cS, y unamos los puntos S y c'; por último, determinemos los puntos C y C' en que las rectas Sc y Sc' cortan á pp'.

De este modo, á cada par de puntos c, c' de la involucion O corresponde un par de puntos C, C' sobre pp'; y el *teorema de Desargues* consiste en que dicho sistema de pares de puntos C, C'..... forma una involucion sobre la recta pp'.

Demostracion. En primer lugar transformemos por la perspectiva la *figura* 90, de suerte que la proyeccion cónica que resulte cumpla con estas dos condiciones:

1.ª Que la proyeccion de la curva A sea una elipse.

2.ª Que la proyeccion del punto a esté en el infinito.

Facilmente se demuestra que esta transformacion es posible.

Basta, en efecto, elegir un punto arbitrario V por punto de vista, y por plano del cuadro uno paralelo á cualquiera de los que pasan por Va y por una secante aU exterior á la cónica: este plano cortará á todas las generatrices del cono proyectante, y además encontrará á la recta Va en el infinito.

Designando por un subacento las proyecciones de los puntos de la *figura* 90, tendremos:

1.° Que la curva A_1 será una elipse.

2.° Que P_1 y p_1p_1' serán un polo y la polar correspondiente de A_1.

3.° Que a_1 será el polo de P_1b_1, y b_1 el de P_1a_1.

4.° Que P_1 y a_1; c_1 y c'_1 serán puntos conjugados de una involucion sobre P_1a_1.

5.° Que c_1S_1 será tangente á la elipse A_1.

En resúmen, la figura proyeccion supone las mismas construcciones que la *figura* 90, y si demostramos que $C_1\ C_1'$ forman una involucion sobre $p_1\,p_1'$, quedará demostrado que C y C'' forman otra sobre pp'.

La única diferencia entre ambas figuras, consiste en que a_1 está en el infinito, y que $P_1\,b_1$ es un diámetro conjugado con la direccion $p_1\,p_1'$. Además P_1 será el centro de la involucion $P_1,\ a_1;\ D_1,\ D'_1;\ c_1,\ c'_1$.

En segundo lugar, transformemos cilíndricamente esta última figura, de suerte que la proyeccion A_2 resulte ser una circunferencia, y tendremos que, con probar el *teorema* para este caso sencillísimo, quedará demostrado para la transformada A_1, y para la cónica propuesta A.

El teorema aplicado al caso particular que examinamos puede enunciarse así.

Sean: O...... un círculo (*fig.* 91);
P...... un punto interior;
MA... la polar de P;
Pa.... una recta paralela á MA;
a y b.. dos puntos que cumplen con la condicion $Pa \times Pb = \mu = constante$; es decir, dos puntos conjugados de una involucion arbitraria sobre Pa, cuyo centro es P y μ la constante.
aT..... una tangente al círculo O;
y por último, A y B los puntos en que Ta y Tb cortan á MA.

Nos proponemos probar $MA \times MB = funcion\ (\mu) =$ *constante*.

Es claro que la ecuacion anterior supone que M es el centro de la involucion AB (dado que sea involucion); pero es evidente que de serlo, M ha ser dicho centro. Porque en efecto, cuando a esté en el infinito de Pa, su conjugado será P, y la tangente aT será $a_\infty T'$, paralela á Pa, de suerte que las rectas Ta, Tb se convertirán en $T'a_\infty$ y $T'M$, que encuentran á MA en el infinito y en M; luego M es punto conjugado con el infinito de MA, y por lo tanto, si los puntos $A, B;\ A', B';\ A'', B''$...... $A_\infty M$ forman involucion, M será su centro.

Puesto que escogidos a y b quedan perfectamente determinados A y B, todo está reducido á espresar MA y MB en funcion de Pa y Pb.

Prolonguemos á este fin TA hasta S, bajemos además Tt perpendicular sobre SU, y hagamos para simplificar:

$OT=r,$
$Tt=c,$
$Ot=d,$
$OP=D,$
$Pa=a,$
y $Pb=b.$

Los triángulos OTt y SMA dan

$$\frac{MA}{MS}=\frac{Ot}{Tt}.$$

ó bien

$$MA=MS\frac{d}{c}=MS\frac{d}{\sqrt{r^2-d^2}}.$$

Por otra parte

$$MS=MP+OP+Ot+St=\frac{r^2-D^2}{D}+$$

$$D+d+\frac{r^2-d^2}{d}=r^2\frac{D+d}{Dd},$$

luego

$$MA=r^2.\frac{D+d}{D}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2-d^2}} \qquad (1).$$

Análogamente, los triángulos SPa y OTt dan

$$\frac{Pa}{PS}=\frac{Ot}{Tt},$$

ó bien

$$Pa=PS\frac{d}{\sqrt{r^2-d^2}};$$

y sustituyendo

$$PS=OP+Ot+St=D+d+\frac{r^2-d^2}{d}=\frac{Dd+r^2}{d},$$

luego resultará

$$Pa=\frac{Dd+r^2}{\sqrt{r^2-d^2}}. \qquad (2)$$

Por último

$$MB=\overline{Pb}-\overline{Cb},$$

y comparando los triángulos CBb, bTE

$$\frac{Cb}{CB}=\frac{ET}{bE},$$

ó bien

$$Cb=\frac{r^2-D^2}{D}\cdot\frac{c-\overline{Pb}}{D+d};$$

luego

$$MB=\overline{Pb}-(c-\overline{Pb})\frac{r^2-D^2}{D(D+d)}$$

$$=\frac{\overline{Pb}(Dd+r^2)-c(r^2-D^2)}{D(D+d)} \qquad (3)$$

De las ecuaciones (1) y (3) se deduce

$$MA \times MB = \frac{r^2}{D^2\sqrt{r^2-d^2}}\left[\overline{Pb}(Dd+r^2)-c(r^2-D^2)\right].$$

Más por hipótesis

$$Pa \times Pb = constante = \mu,$$

luego sustituyendo por Pa su valor (2), resultará

$$\frac{Dd+r^2}{\sqrt{r^2-d^2}} \times Pb = \mu,$$

ó bien

$$\overline{Pb}(Dd+r^2) = \mu c,$$

recordando que

$$\sqrt{r^2-d^2} = c.$$

De aquí se deduce

$$MA \times MB = \frac{r^2}{D^2 c}\left(\mu c - c(r^2-D^2)\right)$$

$$= \frac{r^2}{D^2}(\mu - r^2 + D^2) = constante \qquad (4),$$

y por lo tanto los puntos A, B; A', B'..... forman una involucion cuyo centro es el punto M, que es lo que nos proponemos demostrar.

Núm. 192. *Observaciones.* 1.ª Si consideramos á Pa como una polar del círculo, M será el polo, y es evidente que el teorema subsistirá puesto que de la ecuacion (4) se deduce

$$\mu = Pa \times Pb = \frac{\overline{MA} \times \overline{MB}}{r^2} D^2 + r^2 - D^2 = constante \quad (5),$$

si $MA \times MB = constante.$

Es decir, que si sobre MA establecemos una involucion $A, B.....$; si trazamos desde A la tangente AT, y unimos los puntos T y B, las rectas variables TA, TB determinarán sobre la polar Pa otra involucion.

Luego el teorema subsiste, al ménos para el círculo, no solo cuando el punto P es *interior* sino cuando es *exterior*.

2.ª Realmente la fórmula (5) es idéntica á la (4), y basta para convencerse de ello sustituir á D su valor en funcion de $OM = D'$.

En efecto $r^2 = DD'$, y por lo tanto

$$D = \frac{r^2}{D'},$$

luego

$$\mu = \frac{MA \times MB}{r^2} \frac{r^4}{D'^2} + r^2 - \frac{r^4}{D'^2} =$$

$$\frac{r^2}{D'^2}(MA \times MB + D'^2 - r^2)$$

ó representando el producto $MA \times MB$ por μ'

$$\mu = \frac{r^2}{D'^2}(\mu' - r^2 + D'^2).$$

3.ª La involucion establecida sobre Pa ó sobre MA es de primer género, pero pudiera ser de segundo, sin que por esto cambiasen los resultados.

En efecto, las fórmulas (1) y (2) serian las mismas, y para obtener la (3) tendríamos:

$$MB_1 = Pb_1 + C_1b_1, \quad \frac{C_1b_1}{C_1B_1} = \frac{E_1T}{b_1E_1},$$

$$C_1 b_1 = \frac{r^2 - D^2}{D} \frac{c + Pb_1}{D + d},$$

$$M_1 B_1 = \overline{Pb_1} + \frac{r^2 - D^2}{D} \frac{c + \overline{Pb_1}}{D + d}$$

$$= \frac{\overline{Pb_1}(Dd + r^2) + c(r^2 - D^2)}{D(D + d)}.$$

Esta última fórmula se deduce de la (3), cambiando de signo á PB y á MB. La fórmula final será pues la obtenida anteriormente, cambiando los signos á $MA \times MB$ y á μ; resultado que ya podia preveerse, puesto que ambas involuciones han cambiado de género. Observando ahora que ambos productos, como constantes de dos involuciones, pueden ser positivos ó negativos, resulta que es general la fórmula

$$\mu' = \frac{r^2}{D^2} (\mu - r^2 + D^2).$$

4.ª Hemos generalizado el teorema para las dos clases de involucion que pueden presentarse, y para cuando el polo sea exterior, pero en rigor solo en el caso de una circunferencia.

Supongamos ahora que en la cónica (*fig.* 90), el punto P es exterior, y que por lo tanto la polar corta á dicha cónica.

En la *figura* 92 hemos representado los tres casos que pueden presentarse, segun que la cónica sea elipse, parábola ó hipérbola, y en todos tres se observa que uno de los puntos a ó b, a por ejemplo, es exterior á la curva.

Ahora bien, escogiendo en el espacio un punto de vista arbitrario V, y por plano del cuadro uno paralelo al VaU, determinado por V y por una recta aU exterior á la cónica, es claro que dicho plano cortará al cono proyectante segun una elipse, y que además la proyeccion de a estará en el infinito.

Luego aun cuando el polo sea interior puede transformarse la cónica segun las condiciones del (*Núm.* 191). Aplicando á la transformada el método de proyeccion cilíndrica, obtendremos por último un círculo, y en él un polo exterior y su polar; pero el teorema de Desargues se verifica (*Núm.* 191) para este caso, luego se verificará para la cónica propuesta.

5.ª Los tres lados del triángulo Pab (*fig.* 90) se hallan en el mismo caso respecto á la cónica: es decir

P es polo de ab,
a de Pb,
y b de Pa,

luego podremos aplicar el teorema precedente para cualquiera de dichos tres lados y su vértice opuesto.

Para abreviar diremos, que el triángulo Pab es *conjugado* con la cónica.

6.ª Desde el punto a (*fig.* 91) pueden trazarse dos tangentes, y hasta aquí solo hemos considerado la aT; pero es claro que de considerar la $a'T'$ obtendríamos idénticos resultados, con la única diferencia de hallar otros dos puntos A', B' de la misma involucion á que pertenecen A y B.

Otro tanto pudiéramos decir del punto b si fuere exterior á la circunferencia.

Núm. 193. *Teorema.* Si en la *figura* 93, idéntica á la 90, unimos dos puntos cualesquiera a y A, de las involuciones P y M, por una recta, y por otra los b, B conjugados de los primeros, la recta Bb pasará por el polo de la Aa, y recíprocamente.

Demostracion. Bajemos Oc perpendicular sobre Aa, y determinemos E por la condicion

$$OE \times OC = r^2,$$

ó bien

$$OE = \frac{r^2}{OC}.$$

El teorema está reducido á probar que los puntos, b.... determinado por la ecuacion

$$Pb=\frac{\mu}{Pa};$$

B.... determinado por

$$MB=\frac{1}{MA}\,\frac{r^2}{D^2}\,(\mu-r^2+D^2);$$

y E....., cuya posicion sobre la recta OC está definida por la condicion

$$OE=\frac{r^2}{OC},$$

están en línea recta; es decir, que

$$\frac{Ef}{bf}=\frac{bg}{Bg} \qquad (1)$$

es una identidad.

Hagamos para simplificar:

$$\left.\begin{array}{l} \text{ángulo } COF=\alpha \\ OC=d \\ OE=d' \\ Pa=x' \\ Pb=x'' \\ MA=X' \\ MB=X'' \\ OP=D \\ OM=D' \end{array}\right\} \begin{array}{r}\text{entre cuyas}\\ \text{cantidades}\\ \text{existen las}\\ \text{relaciones.}\end{array} \left\{\begin{array}{l} dd'=r^2 \\ x'x''=\mu \\ X'X''=\mu'=\dfrac{r^2}{D^2}(\mu-r^2+D^2) \\ DD'=r^2. \end{array}\right.$$

Tendremos evidentemente:

$$Pa = x' = PH + Ha = OF + Ha = \frac{OC}{\cos\alpha} + HF\,tg\,\alpha$$

$$= \frac{d}{\cos\alpha} + D\,\frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{d + D\,sen\,\alpha}{\cos\alpha},$$

$$Pb = x'' = \frac{\mu}{x'} = \frac{\mu\cos\alpha}{d + D\,sen\,\alpha};$$

y del mismo modo

$$MA = X' = \frac{d + D'\,sen\,\alpha}{\cos\alpha},$$

$$MB = X'' = \frac{\mu'}{X'} = \frac{\mu'\cos\alpha}{d + D'\,sen\,\alpha}.$$

Por otra parte

$$Ef = d'\,sen\,\alpha + D, \quad bf = d'\cos\alpha - x'',$$

$$bg = D' - D, \quad Bg = x'' - X'';$$

luego la condicion (1) será de la forma

$$\frac{d'\,sen\,\alpha + D}{d'\cos\alpha - x''} = \frac{D' - D}{x'' - X''};$$

que sustituyendo por

$$d', D', x'', \text{ y } \mu'$$

sus valores, se transformará en la siguiente:

$$\frac{\frac{r^2}{d}\, sen\, \alpha + D}{\frac{r^2}{d} \cos \alpha - \frac{\mu \cos \alpha}{d + D\, sen\, \alpha}} =$$

$$\frac{\frac{r^2}{D} - D}{\frac{\mu \cos \alpha}{d + D\, sen\, \alpha} - \frac{r^2}{D^2}(\mu - r^2 + D^2) \frac{\cos \alpha}{d + \frac{r^2}{D}\, sen\, \alpha}},$$

ó bien

$$\frac{1}{r^2 \cos \alpha\, (d + D\, sen\, \alpha) - d\, \mu \cos \alpha} =$$

$$\frac{r^2 - D^2}{\mu \cos \alpha\, (d\, D^2 + r^2\, D\, sen\, \alpha) - r^2(\mu - r^2 + D^2)\, (d + D\, sen\, \alpha) \cos \alpha},$$

y por último, simplificando

$$\frac{1}{r^2 \cos \alpha\, (d + D\, sen\, \alpha) - d\, \mu \cos \alpha} =$$

$$\frac{1}{r^2 \cos \alpha\, (d + D\, sen\, \alpha) - d\, \mu \cos \alpha}$$

que es una identidad.

Núm. 194. *Teorema.* Dada una cónica cualquiera (*figura* 94, que es idéntica á la *figura* 90), si se unen dos puntos arbitrarios *a*, *A* por una recta, y los conjugados *b*, *B* de las dos involuciones *P* y *M*, la recta *Bb* pasará por el polo *E* de la recta *aAC*.

Demostracion. Transformando la *figura* 94 en otra análoga á la *figura* 91, tendremos, segun el teorema anterior, que *Bb* (*fig.* 93) pasará por *E*; pero la polar y el polo, así como los sistemas en involucion, son proyectivos, luego el teorema es general.

Núm. 195. Imaginemos que en la *figura* 94, la recta Aa está en el infinito: tendremos que b será el centro de la involucion sobre Pa; B el de la involucion MA; y O, centro de la cónica, el polo de Aa; luego en el caso general, los *centros de ambas involuciones están en línea recta con el centro de la curva.*

De aquí resulta, que para hallar en la *figura* 90 el centro de la involucion sobre pp', basta unir el centro A de la cónica al O de la involucion sobre Pa, y prolongar la recta AO hasta que corte á pp'.

Núm. 196. Sea cual fuere la involucion que se escoja sobre Pa (*fig.* 90), los puntos P y a pertenecen á ella: aplicando á estos puntos el método general para deducir el segmento de la involucion sobre pp' correspondiente al Pa, tendremos que trazar aS' tangente á la cónica, y unir S' á P por una recta; pero a es el polo de Pb, luego $S'P$ coincide con Pb, y b será el punto conjugado de a.

Es decir, que a y b son puntos comunes á todas las involuciones de pp' correspondientes á las que se establezcan sobre Pa.

Además los puntos $a, b; a', b'; a'', b''$..... forman una involucion (*Núm.* 187) sobre pp', cuyo centro se obtiene trazando el diámetro AT conjugado con pp', luego puede decirse que ab es el segmento comun á la involucion fija T y á la involucion sobre pp' deducida del teorema.

Núm. 197. *Problema inverso.* Sean (*fig.* 90) A una cónica, P un polo, y pp' la línea polar. A cada posicion de la recta Pa corresponden infinitas involuciones sobre dicha recta, segun sea el centro que se elija, y á cada una de estas involuciones corresponde asimismo una involucion y un centro sobre pp': este centro varia por la ley de continuidad. Así pues, sea cual fuere el punto que sobre la recta pp' escojamos como centro de involucion, siempre corresponderá á una cierta involucion sobre Pa, enlazada con la primera segun indica el Teorema de Desargues; más el parámetro de la involucion no es arbitrario, como tampoco lo es el de la involucion correspondiente sobre Pa. Si R es el centro sobre pp', el parámetro será $Ra \times Rb$; y uniendo los puntos A y R por una recta, el punto O en que corta á Pa será el centro de la involucion sobre Pa, y $OP \times Oa$ su parámetro.

En resúmen, una vez fija y determinada la recta Pa, *podemos elejir arbitrariamente el centro* R *de la involucion sobre* pp', *pero no el parámetro.*

Podemos aún presentar esta proposicion con más claridad suponiendo sobre xx' (*fig.* 95) infinitos centros o, o', o''..... variando de una manera contínua; á cada centro corresponderá un parámetro

$$m = oa \times ob;\ m' = o'a \times o'b;\ m'' = o''a \times o''b \ldots\ldots$$

y en cada punto podemos imaginar escrito el número correspondiente: m en o; m' en o'; m'' en o'';.....

Si suponemos ahora que varia Pa, variarán a y b, y para los nuevos puntos a' y b', los números de o, o', o'' serán distintos:

$$n = oa' \times ob' \text{ para } o;\ n' = o'a' \times o'b' \text{ para } o';$$
$$n'' = o''a' \times o''b' \text{ para } o'' \ldots\ldots$$

Es decir, que variando Pa por la ley de continuidad, para cada punto fijo o, o', o''..... de la recta dada xx', considerado como centro de involucion, corresponderán infinitos valores:

$$m, n, p \ldots\ldots \text{ para } o;\ m', n', p' \text{ para } o';$$
$$m'', n'', p'' \ldots\ldots \text{ para } o'' \ldots\ldots$$

Fácil es demostrar que el parámetro varia para cada punto entre $+\infty$ y $-\infty$: en efecto, sea T (*fig.* 96) el centro de la involucion $a, b; a', b'; a'', b''$..... (*Núm.* 188), y O un punto fijo de pp' considerado como centro de todas las involuciones que formemos.

Veamos cómo varia $Oa \times Ob = m$ cuando varian a y b (*figura* 96).

Tenemos

$$Oa = OT + Ta, \quad \text{y} \quad Ob = OT - Tb;$$

luego

$$m = (OT + Ta)\,(OT - Tb) =$$
$$OT^2 + OT\,(Ta - Tb) - Ta \times Tb;$$

pero OT^2 y $Ta \times Tb$ son constantes, luego

$$m = constante + OT(Ta - Tb).$$

$Ta - Tb$ y por lo tanto m varian entre $+\infty$ y $-\infty$, puesto que para

$$Tb = o, \; Ta = \infty \quad \text{y} \quad m = \infty,$$

y para

$$Ta = o, \; Tb = \infty \quad \text{y} \quad m = -\infty;$$

y basta para convencerse de ello recordar que $Ta \times Tb =$ *constante*.

De aquí se deduce, que dados sobre la recta pp' (*fig.* 90) un centro de involucion y su parámetro, este corresponderá á cierta recta Pa y á cierta involucion sobre dicha recta, y puede, segun lo expuesto, formularse el siguiente

Problema. Dada sobre pp' una involucion, determinar, primero el segmento comun con la involucion fija T, es decir, los puntos a y b; segundo, la involucion correspondiente sobre Pa, su centro, y sus puntos dobles si existen.

Examinaremos varios casos.

I. Que la recta pp' sea exterior á la cónica, y que la involucion sea del género $m < o$.

Si por el punto T (*fig.* 97) levantamos una perpendicular TM á pp', igual al parámetro M de la involucion fija T, es claro (*Núm.* 79) que los segmentos de esta involucion serán los diámetros de las varias circunferencias que, pasando por T, tengan su centro en pp'. Del mismo modo, levantando en C la recta Cm, igual al parámetro de la involucion C, los segmentos de dicha involucion pertenecerán á las circunferencias que pasen por C y tengan su centro en pp'. De aquí se deduce, que el segmento comun á ambas involuciones será el diámetro ab de la semicircunferencia $aMmb$.

Uniendo los puntos a y b al polo P de la recta pp', la involucion C podrá corresponder á una involucion sobre Pa, ó bien á otra sobre Pb, cuyos centros se obtendrán trazando el diámetro OC.

o y $oP\times oa$ serán centro y parámetro de la involucion sobre Pa:

o' y $o'P\times o'b$ serán iguales elementos para la involucion sobre Pb.

Los puntos dobles de esta última, son imaginarios.

Los de la primera se obtendrán hallando una media proporcional á oP y oa.

II. Que la recta pp' sea exterior, y la involucion del género $m>o$.

Si por T (*fig.* 98) levantamos TM perpendicular sobre pp', los segmentos de la involucion T serán, como en el caso anterior, los diámetros de las semicircunferencias que pasan por M y tengan su centro en pp'.

Sea ahora C el centro de la involucion dada, cuyo parámetro representaremos por m^2. Si sobre la recta CM buscamos un punto N por la condicion $CM\times CN=m^2$, y hacemos pasar por M y N la semicircunferencia $bNMa$, el segmento ab será comun á ambas involuciones.

En efecto, a y b pertenecen á la involucion T, segun queda demostrado; y observando que

$$Ca\times Cb=CN\times CM=m^2,$$

resulta que tambien pertenecen á la involucion C.

Uniendo el centro de la cónica O á C, y trazando las rectas Pa y Pb, los puntos o y o' serán los centros de las involuciones sobre Pa y Pb.

III. Que la recta pp' sea tangente á la cónica, y la involucion corresponda á $m < o$.

Cuando la recta pp' se aproxima á la cónica (*fig.* 97), el polo P y el punto T tienden á confundirse: además, dado el punto a, para determinar la recta Pb, deberemos trazar dos tangentes á la cónica (*fig.* 99), una de las cuales será la recta aT y la otra ac. La Pb del caso general será en el que examinamos la Tc; la Pa se confundirá con Ta; y el punto b conjugado con a será el mismo punto T. Los puntos a, a', a''..... tendrán por único punto conjugado T, y el parámetro de la involucion T será nulo.

Si consideramos este caso como límite del primero, deberemos suponer nula la ordenada TM (*figura* 97); el punto M coincidirá con T, y llegaremos á la siguiente construccion.

Por el centro C de la involucion dada, levántese $Cm =$ *al parámetro* y perpendicular sobre pp': hágase pasar por m y T una semicircunferencia, y el segmento aT será el buscado. Trazando oc tangente á la cónica, obtendremos la recta cT conjugada con la aT, y uniendo los puntos C y O, el o, en que dicha recta CO corta á cT, será el centro de la involucion sobre CT.

IV. *Que la recta pp'* (*fig.* 100) *sea tangente á la cónica, y además se tenga* $m > o$.

Consideraciones análogas á las precedentes conducen á la siguiente construccion.

Trácese la semicircunferencia CT, y la cuerda Cm igual á la raiz cuadrada del parámetro de la involucion C; bajando ma perpendicular sobre CT, los puntos a y T serán los que nos proponíamos hallar: la tangente ac determinará la recta cT conjugada con aT, y OC determinará el centro o.

V. *Que la recta pp'* (*fig.* 101) *corte á la cónica, y que además se tenga* $m < o$.

Sea C el centro de la involucion dada, y T el punto de interseccion de OP y pp'; este punto será el centro de la involucion fija sobre dicha recta, involucion que siempre será de primer género.

Bastará, para conocer el segmento comun á dichas involuciones: 1.° levantar Cm perpendicular sobre pp', é igual en longitud á la raiz cuadrada del parámetro dado m^2; 2.° trazar TM, y determinar sobre esta recta un punto n por la condicion $Tm \times Tn = n^2$ (siendo n^2 el parámetro de la involucion T); 3.° hacer pasar por m y n la semicircunferencia $anmb$: ab será el segmento buscado y Pa, Pb las dos rectas conjugadas que corresponden á la involucion C.

En efecto, a y b pertenecen á la involucion C, puesto que se tiene

$$Cm^2 = m^2 = Ca \times Cb:$$

además pertenecen á la involucion T, toda vez que

$$Tm \times Tn = n^2 = Ta \times Tb.$$

La recta oC determinará sobre Pa y Pb los centros o y o' de las dos involuciones correspondientes.

IV. Que la recta pp' (fig. 102) corte á la cónica, y que además se tenga $m > o$.

Unamos un punto cualquiera m con T y C, y determinemos sobre las rectas Cm, Tm dos puntos n y n', que cumplan con las condiciones

$$Cm \times Cn = m^2; \; Tm \times Tn' = n^2:$$

haciendo pasar por m, n, n' una circunferencia, los puntos a y b en que corte á pp' serán los que determinen el segmento buscado ab. La recta OC determinará las involuciones o y o'.

En efecto, a, b pertenecen á la involucion C, puesto que

$$Ca \times Cb = Cm \times Cn = m^2,$$

y además pertenecen á la involucion T, puesto que

$$Ta \times Tb = Tm \times Tn' = n^2.$$

Núm. 198. *Aplicacion del teorema de Desargues.* Sea C (*fig.* 103) una cónica cualquiera, directriz de un cono de segundo grado cuyo vértice está en S; y sea pp un plano secante que cortará al cono segun otra cónica C'.

Nos proponemos hallar sobre el plano de la directriz:

1.° Un punto P, cuya proyeccion cónica O' sobre el plano pp (tomando S por punto de vista), sea el centro de C'.

2.° Dos rectas PA, PB, cuyas proyecciones cónicas $O'A'$, $O'B'$ sobre pp (siendo siempre S el punto de vista), sean los ejes de C'.

3.° Dos rectas que al proyectarse sobre pp sean dos diámetros conjugados de C', formando un ángulo α.

4.° Los puntos D, D', cuyas proyecciones sobre pp sean los focos de C'.

5.° Las rectas del plano C que se proyecten sobre pp segun tangentes y normales á C'.

Tracemos por el vértice S del cono un plano $Sp'p'$, paralelo al pp, y determinemos la recta $p'p'$, segun la cual corta al plano de C. Hagamos girar dicho plano $Sp'p'$ hasta que se aplique sobre el plano de la base, y sea S' la posicion que toma S. (No se eche en olvido, que la figura que presentamos está deformada por la perspectiva.)

Finalmente, hallemos el polo P de $p'p'$ en la cónica dada C.

Con estos elementos podemos hallar todas las incógnitas del problema.

Núm. 199. 1.° *Centro.* La proyeccion O' de P es el centro de C'.

En efecto, el polo P y la polar $p'p'$ se proyectarán sobre el plano pp segun un polo y la polar correspondiente de C'; pero $p'p'$ se halla en el plano $Sp'p'$ paralelo á pp, luego su proyeccion estará en el infinito de este último, y por lo tanto su polo será el centro de la cónica.

2.° *Diámetros conjugados y ejes.* Sea ab un segmento de la involucion T, correspondiente á la cónica C de la base. Todas las rectas alr, $al'r'$, que parten de un punto a de $p'p'$, quedan divididas armónicamente (*Núm.* 165) por el punto a, la cónica, y la recta Pb conjugada de Pa, puesto que *Pb* (*Núm.* 187) es la polar de *a;* luego las proyecciones sobre *pp* de los varios sistemas de cuatro puntos *a, l, q, r, a, l', q', r'*..... gozarán de la misma propiedad. Ahora bien, *a* está en el plano *Sp'p'* y va al infinito de *pp;* luego las proyecciones de las secantes *ar, ar'*..... serán sobre el plano de la cónica *C''* rectas paralelas: pero dichas cuerdas deben quedar divididas armónicamente por la cónica, el infinito y la proyeccion de *Pb* (*Núm.* 165); de consiguiente las proyecciones de *q, q'*..... serán los puntos medios de las proyecciones de *lr, l'r'*.....

En resúmen, *lr, l'r'*..... y *Pb* se proyectarán sobre *C'*, las primeras segun un sistema de cuerdas paralelas, y la última segun el diámetro conjugado de dichas cuerdas: así, la proyeccion de *Pa* será el diámetro conjugado con la proyeccion de *P b*.

Uniendo, pues, dos puntos conjugados *a, b* de la involucion *T*, con *P*, las rectas *Pa, Pb* se proyectarán segun dos diámetros conjugados de la cónica *C*.

Esto mismo, para más claridad, lo hemos representado aparte en la *figura* 104.

ac, ac', ac''..... son las secantes:

Pb........... la recta que con la cónica las divide armónicamente en *q, q', q''*.....

Pa y *Pb*...... las rectas cuyas proyecciones son dos diámetros conjugados; y en esta figura se ve claramente cómo las proyecciones de las tangentes á *C*, trazadas por *a*, serán paralelas, y cómo la proyeccion de *b P*, que unirá los puntos de contacto de dos tangentes paralelas, será un diámetro conjugado con el haz paralelo en que se convierte el haz concurrente *acc'c''*.....

El plano proyectante de *Pa* (*fig.* 103) pasa por *SP* y *Pa;* y el de *Pb* por *SP* y *Pb;* pero los planos *pp* y *Sp'p'* son paralelos; luego las proyecciones *O'A'* y *O'B'* de dichas rectas pasarán por *O'*, y además serán paralelas á *Sa* y *Sb:* de aquí resulta que *cada dos diámetros conjugados, proyecciones de las rectas Pa, Pb, forman el mismo ángulo que las Sa, Sb, que van desde el vértice del cono á los puntos conjugados de la involucion T.*

De aquí se deduce inmediatamente la solucion de la *segunda* y *tercera* parte del problema.

Determinando, en efecto, en la involucion T un segmento $a'b'$, tal que uniendo el punto S á los extremos a' y b' formen las rectas Sa', Sb' un ángulo α, quedarán determinados dos diámetros conjugados de C', cuyo ángulo será evidentemente igual á α.

Si el ángulo aSb es *recto*, las rectas Pa, Pb se proyectan segun los ejes de C'.

El primer problema se reduce á una sencilla cuestion de geometría elemental (1), el segundo ha sido ya completamente resuelto.

3.° *Tangentes. Normales.* Si desde el punto S (*fig.* 103) bajamos, en el plano $Sp'p'$, la recta SE perpendicular sobre $p'p'$, y consideramos á E como centro de una involucion cuyo parámetro sea SE^2; si además buscamos el segmento ab comun á ambas involuciones E y T; si, finalmente, sobre Pa ó Pb determinamos el centro de la involucion correspondiente, cuyos puntos dobles D, D' sean reales, dichos puntos nos servirán para resolver inmediatamente el problema.

En efecto, sea G un punto de la curva C. Tracemos la tangente Gh hasta que corte á Pa, y sea h este punto.

Hallemos sobre Pa el punto h' conjugado de h, en la involucion de la que D y D' son puntos dobles.

Es fácil probar que Gh y Gh' se proyectarán segun la tangente y la normal en G' de C'.

---

(1) El problema puede enunciarse en estos términos:

Dada una involucion T (*fig.* 105) y un punto S, determinar un segmento ab de dicha involucion, tal que uniendo el punto S á los a, b, el ángulo aSb que resulte tenga un valor dado α.

Para ello uniremos los puntos T y S, y determinaremos el punto N sobre TS, de modo que $TS \times TN =$ constante de la involucion T; y todo queda reducido á trazar sobre NS un segmento $NabS$, que determine $aSb = \alpha$.

Proponemos al lector este sencillísimo problema de Geometría como ejercicio.

Que Gh se proyectará segun la tangente en G' no cabe duda, y no debemos insistir sobre este punto.

Sean ahora H y H' los puntos en que Gh y Gh' cortan á $p'p'$.

GSH y GSH' son los planos proyectantes de Gh y Gh', y cortarán á los planos pp y $Sp'p'$ segun rectas paralelas; luego las proyecciones de Gh y Gh' formarán el mismo ángulo que SH y SH', intersecciones de los planos proyectantes con el $Sp'p'$; pero H y H', segun el teorema de Desargues, son puntos conjugados de la involucion E, luego el ángulo HSH' es *recto*.

Es decir, que la proyeccion de Gh' será perpendicular á la proyeccion de Gh; y como Gh se proyecta segun la tangente, dedúcese finalmente, que Gh' se proyectará segun la normal.

4.° *Focos*. Las proyecciones de los puntos dobles D, D' son los focos de C'.

Se sabe que en una involucion de primer género los puntos dobles dividen armónicamente á todos los segmentos de la involucion; luego si D y D' son los puntos dobles, los cuatro puntos h, D, h', D' formarán un sistema armónico, y el haz $(GhDh'D')$ será un haz armónico. Su proyeccion sobre el plano pp será tambien otro haz armónico: pero Gh y Gh' son, segun lo demostrado anteriormente, la tangente y la normal de la cónica C' en G'; luego tendremos un haz armónico $G'tdnd'$ (*fig*. 106), en el que dos de las rectas conjugadas $G'n$, $G't$ forman ángulo recto, y se sabe que en este caso las otras dos forman ángulos iguales con las primeras: es decir, ángulo $dG'n = d'G'n$.

Otro tanto puede decirse de cualquier punto G'', G'''..... de la cónica C', luego d y d', proyecciones de los puntos D, D', gozan de la siguiente propiedad: *uniendo dichos puntos* d, d' *á cualquier punto de la curva —G' por ejemplo,— las rectas dG', $d'G'$ forman ángulos iguales con la normal;* y esta propiedad es característica de los focos.

Núm. **200**. Hemos dicho que cuando en un haz armónico dos rectas forman ángulo recto, las otras dos forman ángulos iguales con las primeras.

En efecto, trazando (*fig.* 107) la secante xx' perpendicular sobre Sb, será paralela á $S\infty$, y resultarán los cuatro puntos en relacion armónica d, b, d' y el infinito de xx'. Pero siendo el infinito el conjugado de b, este es el punto medio de dd', y por lo tantó $db = d'b$; de donde resulta ángulo $dSb =$ ángulo $d'Sb$.

V.—*Curvas polares recíprocas.*

Núm. **201.** Imaginemos una curva de segundo grado fija y determinada C, y representemos por A una recta cualquiera, y por a el polo de dicha recta con relacion á la cónica C.

Si la recta A varia por la ley de continuidad, de tal modo que siempre sea tangente á una curva arbitraria B, el polo a variará tambien de posicion, y engendrará otra curva b: las curvas B y b se dice que son *polares recíprocas*, y en breve veremos justificada esta denominacion: por el pronto notemos que á cada tangente A, A', A''..... de la curva B corresponde un punto a, a', a'' de la curva b, y que estos últimos son los polos de aquellas rectas. Basta lo dicho para justificar el nombre de *polares* con que hemos designado ambas curvas.

Si consideramos dos tangentes A, A' de la curva B, y los polos respectivos a, a', la recta (aa') que une estos dos puntos será la polar del punto en que se cortan A y A' (*Número* 186); pero si estas rectas se aproximan, tendiendo á confundirse, los puntos a, a' se aproximarán tambien, y la secante aa' se aproximará cada vez más á ser una tangente de la curva b. Pasando al límite vemos que el punto (A, A'), en que se cortan las dos tangentes, se convierte en un punto de la curva B, y la recta aa' en una tangente de la curva b, sin que por esto aa' haya dejado de ser la polar de (A, A'); luego cada tangente de la curva b es la polar de un punto de la curva B, y por lo tanto, esta es respecto á b lo que b era respecto á B.

De otro modo, y con más claridad, los puntos P, P', P''..... p, p', p''..... de las curvas B y b se corresponden dos á dos: P á p; P' á p'; P'' á p''.....; la tangente en P tiene por polo p, y la tangente en p tiene por polo P; y otro tanto puede decirse de los pares de puntos P', p'; P'', p''.....

Esta última propiedad prueba que no hay diferencia específica entre las curvas B y b respecto á la cónica C, y que es propia y adecuada la denominacion de *recíprocas* que comunmente se les da.

Núm. **202.** Los desarrollos de los números 152 y siguientes, y las fórmulas de la Geometría analítica que determinan las coordenadas del polo dada la polar, ó los coeficientes de esta dado el polo, prueban que las curvas *polares recíprocas* no son en el fondo otra cosa que *figuras correlativas*, y podremos en consecuencia aplicar á aquellas las propiedades demostradas para estas últimas.

Indicaremos, sin demostracion en razon á su sencillez, los siguientes teoremas.

I. Al punto (A, A') en que se cortan dos tangentes A, A' de la curva B, corresponde una recta aa' en la curva b, recta determinada por los polos de A y A'.

II. Si desde un punto M se pueden trazar m tangentes á la curva B, una secante cortará en m puntos á la curva b.

III. Si la curva B es una cónica, la b lo será tambien.

IV. La relacion anarmónica de cuatro rectas concurrentes del sistema B, es igual á la de los polos de dichas rectas.

Núm. **203.** La consideracion de las curvas recíprocas, da origen al principio *dualista*, ó á la *dualidad* de la nueva geometría: teoría por la que conocidas ciertas propiedades ó ciertos teoremas, ó resueltos problemas de una categoría determinada, se *duplican* dichas propiedades, problemas ó teoremas, con solo emplear la transformacion que en este párrafo acabamos de exponer.

Algunos ejemplos harán que se comprenda mejor esta idea.

Núm. **204.** *Teorema.* Dado un círculo y cuatro puntos $A', A'', A''', A^{\text{IV}}$ sobre él, si escojemos otro punto cualquiera M sobre dicho círculo, el haz de rectas MA',

MA'', MA''', MA^{IV}, ó abreviadamente $(MA'A''A'''A^{\text{IV}})$, tiene su relacion anarmónica constante.

Demostracion. Este teorema es evidente, puesto que la relacion anarmónica de un haz de cuatro rectas solo depende de los ángulos que forman entre sí, y dichos ángulos $A'MA''$, $A''MA'''$, $A'''MA^{\text{IV}}$ lo son, sea cual fuere la posicion del punto M.

Núm. 205. *Teorema.* Dada una cónica y cuatro puntos sobre ella, subsiste el teorema anterior para cualquier haz inscrito.

Demostracion. Basta, para convencerse de la verdad de esta proporcion, trasformar la cónica en un círculo, y recordar que las relaciones anarmónicas de rectas ó haces son proyectivas.

Núm. 206. Sin necesidad de nueva demostracion directa, y con solo aplicar el principio *dualista*, podemos formular el siguiente

Teorema. Dada una cónica C y cuatro tangentes fijas T', T'', T''', T^{IV}, la relacion anarmónica de los cuatro puntos en que otra tangente variable S corta á las primeras, es constante, é independiente de la posicion que esta última ocupa.

Demostracion. Busquemos por relacion á una cónica cualquiera c, tomada, por decirlo así, como base de la transformacion, la cónica C', polar recíproca de C, y en esta los puntos A', A'', A''', A^{IV}, polos de T', T'', T''', T^{IV}.

Ahora bien, á las tangentes T', T'', T''', T^{IV} corresponden los puntos A', A'', A''', A^{IV};
á la tangente S corresponde el punto variable M;
á los puntos en que S corta á T', T'', T''', T^{IV}, es decir á (S, T'), (S, T''), (S, T'''), (S, T^{IV}),
las rectas MA', MA'', MA''', MA^{IV};

luego á la relacion anarmónica de estos cuatro puntos corresponderá la del haz $(MA'A''A'''A^{\text{IV}})$; pero esta es constante (*Núm.* 204), y ambas relaciones anarmónicas son iguales, luego tambien será constante la de los puntos en que S corta á las cuatro tangentes fijas.

Núm. 207. Como ejercicio de este mismo método, tan fecundo como ingenioso, y que permite *duplicar de un golpe*, por decirlo así, la geometría, presentaremos los siguientes ejemplos.

I. *Teorema directo.* Por cinco puntos dados por sus coordenadas x', y'; x'', y''; x''', y'''; $x^{\text{iv}}, y^{\text{iv}}$; $x^{\text{v}}, y^{\text{v}}$, solo puede pasar una cónica.

Demostracion. La ecuacion general de la cónica será

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e = o,$$

y á esta deben satisfacer las coordenadas de los cinco puntos; luego tendremos las cinco ecuaciones de primer grado entre las incógnitas a, b, c, d, e,

$$y'^2 + ax'y' + bx'^2 + cy' + dx' + e = o,$$

....

$$y^{\text{v}2} + ax^{\text{v}}y^{\text{v}} + bx^{\text{v}2} + cy^{\text{v}} + dx^{\text{v}} + e = o,$$

de las que solo podremos deducir *un sistema* de valores para dichas incógnitas. Solo hay por lo tanto una cónica capaz de pasar por cinco puntos.

Teorema inverso. Solo hay una cónica tangente á cinco rectas dadas A', A'', A''', A^{iv}, A^{v}.

Demostracion. Transformemos por el método de las polares recíprocas las cinco rectas dadas, y obtendremos cinco puntos P', P'', P''', P^{iv}, P^{v}; pero solo hay una cónica que pase por estos cinco puntos, luego solo hay una tangente á las cinco rectas dadas.

II. *Teorema directo.* Dados cuatro puntos y una recta, solo se pueden hallar *dos cónicas* que pasen por dichos puntos y tangentes á la recta.

Demostracion. Puesto que la cónica pasa por los cuatro puntos dados, tendremos cuatro ecuaciones de primer grado en a, b, c, d, e de la forma

$$y'^2 + ax'y' + bx'^2 + cy' + dx' + e = o;$$

y eligiendo la recta dada por eje de la x, al hacer $y=o$ en la ecuacion general de la cónica buscada,

$$y^2+axy+bx^2+cy+dx+e=o,$$

con lo cual obtendremos

$$bx^2+dx+e=o,$$

esta ecuacion deberá darnos dos raices iguales, para lo cual debe verificarse

$$d^2-4be=o,$$

ecuacion de segundo grado en b, d, e.

El sistema de cinco ecuaciones entre a, b, c, d, e, formado por cuatro de primer grado y una de segundo, nos dá dos sistemas de valores para todas ellas; luego hay dos cónicas que cumplan con las condiciones del problema.

Teorema inverso. Dadas cuatro rectas y un punto, solo se pueden hallar *dos cónicas* tangentes á las rectas y que pasen por el punto.

La transformacion por polares recíprocas es aplicable á este caso como al precedente, y con igual sencillez.

III. *Teorema directo.* Dados tres puntos y dos rectas, solo se pueden hallar cuatro cónicas que pasen por dichos puntos y que sean tangentes á las dos rectas.

Demostracion. Sea la ecuacion de la cónica buscada

$$y^2+axy+bx^2+cy+dx+e=o,$$

en la que a, b, c, d, e son incógnitas.

Tomando por ejes de las x, y las dos rectas dadas, tendremos, para determinar las incógnitas del problema, tres ecuaciones lineales en a, b, c, d, e, de la forma

$$y'^2+ax'y'+bx'^2+cy'+dx'+e=o,$$

y otras dos de segundo grado

$$d^2 - 4\,b\,e = o,$$

$$c^2 - 4\,e = o.$$

El conjunto de estas cinco ecuaciones sòlo admite cuatro sistemas de valores, segun el teorema de Bezout; luego la proposicion queda demostrada.

Teorema recíproco: Dadas tres rectas y dos puntos, solo pueden hallarse cuatro cónicas tangentes á las rectas dadas y que pasen por dichos dos puntos.

Nota. En la *figura* 103 la recta PS debe pasar por O', y deben estar en línea recta los puntos $k'\,G\,H'$.

Téngase además en cuenta, para evitar dudas, que toda la figura está deformada por la perspectiva, y que ha sido preciso alterar la posicion de algunas líneas para reducir la extension de la lámina.

INDICE.

PRIMERA PARTE.

SEGUNDA PARTE.

Aplicaciones.

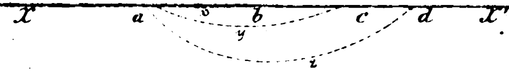


Fig. 4

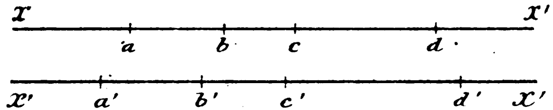


Fig. 5.

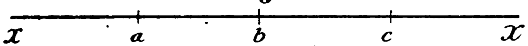


Fig. 6.

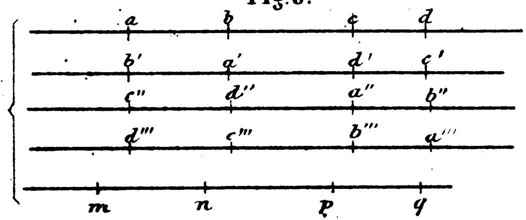


Fig. 7.

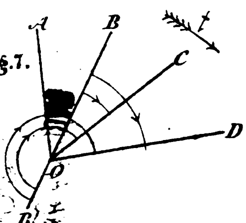


Fig. 9.

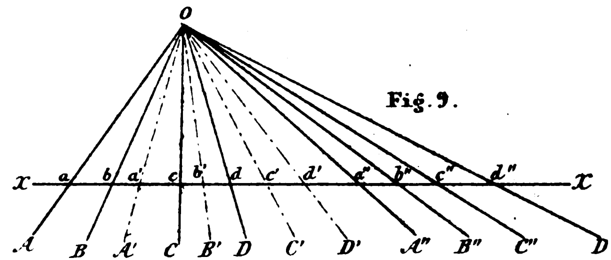
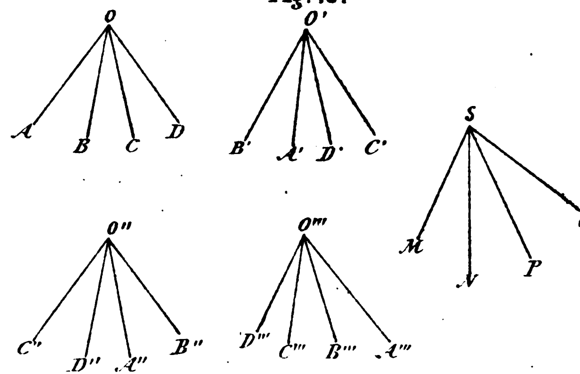
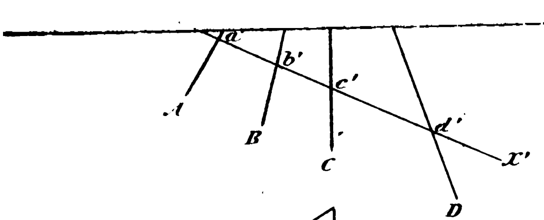
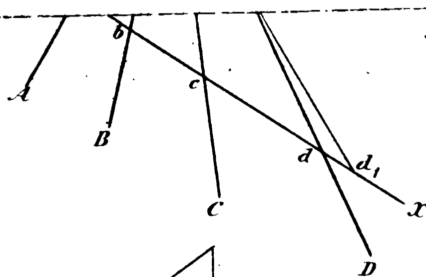
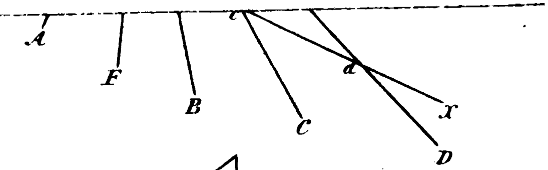


Fig. 10.









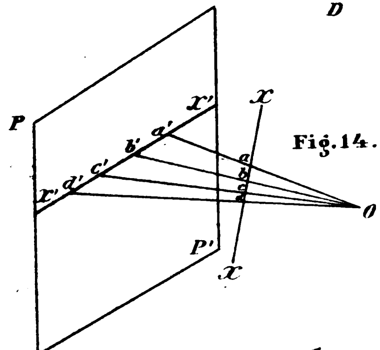


Fig. 14.

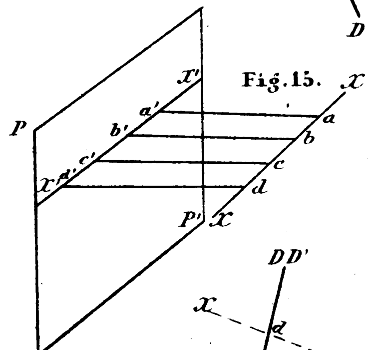


Fig. 15.

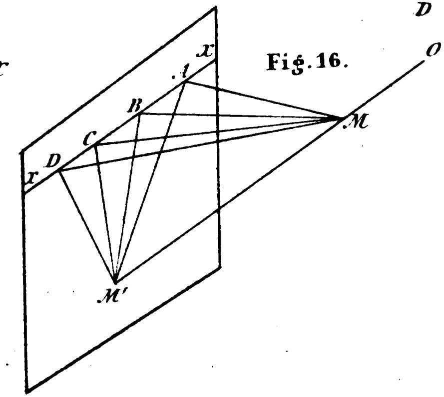


Fig. 16.

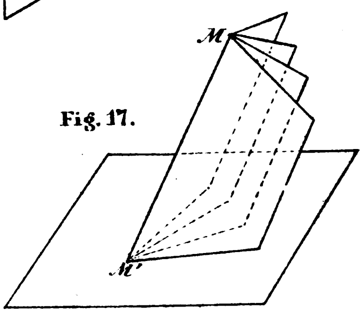


Fig. 17.

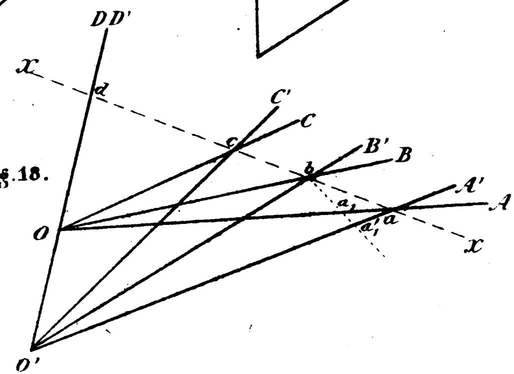


Fig. 18.

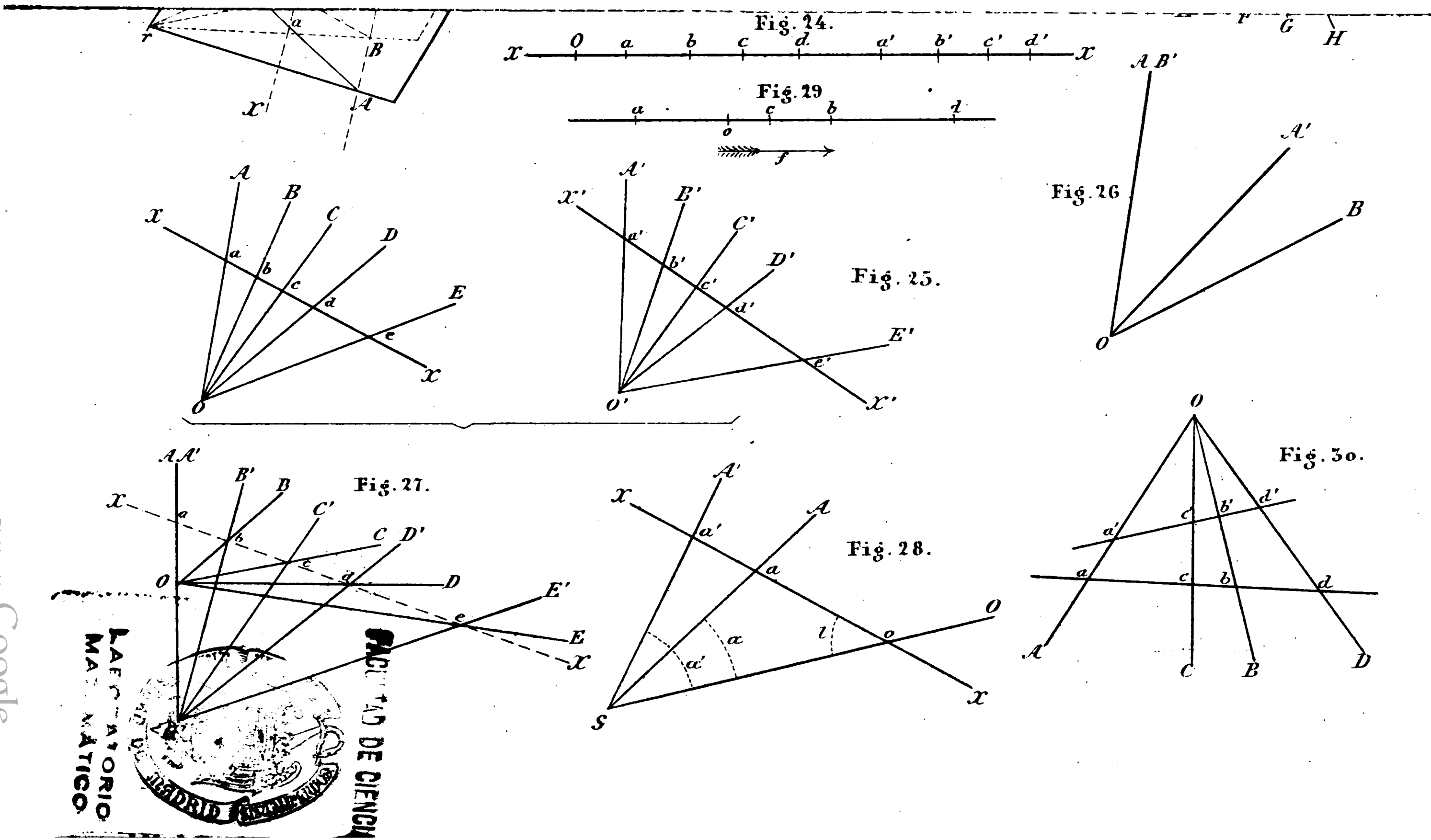


Fig. 24.
Fig. 29
Fig. 25.
Fig. 26
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 30.

Fig. 35.

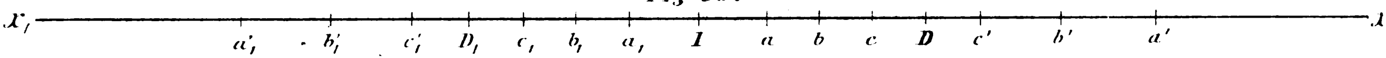


Fig. 36.

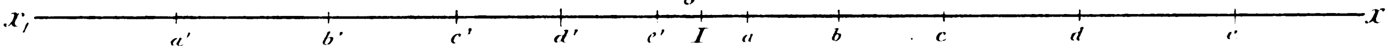
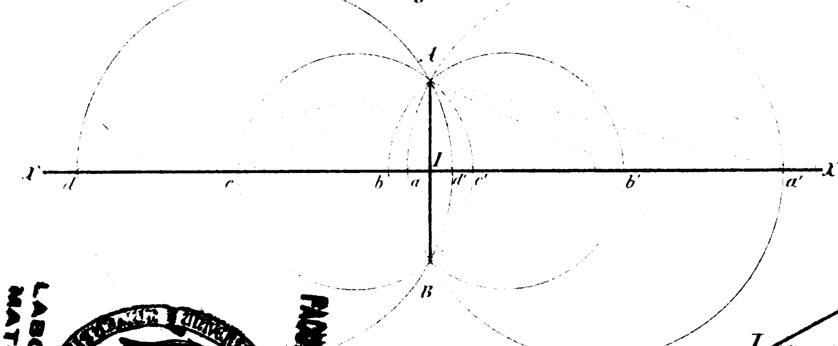


Fig. 38.



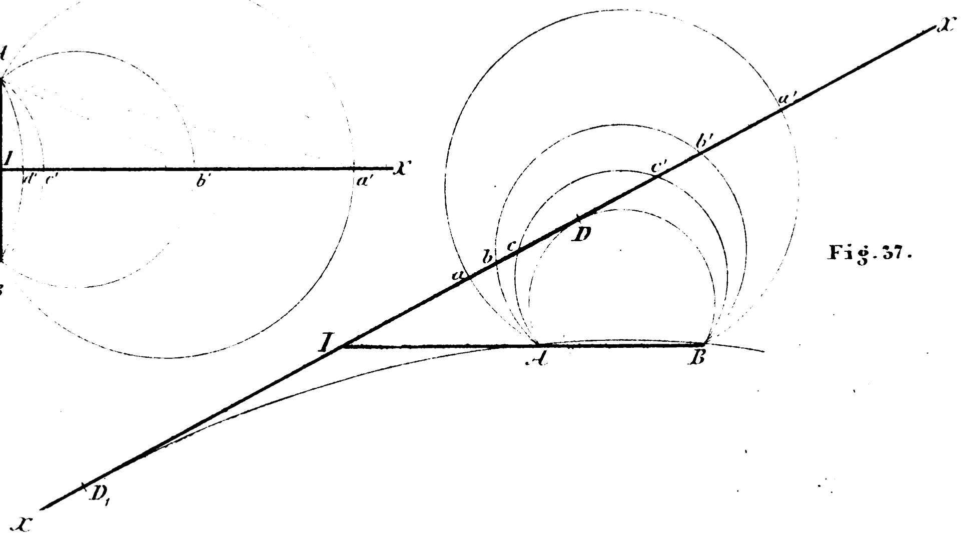
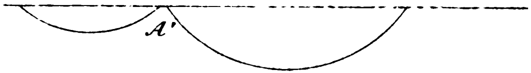


Fig. 37.



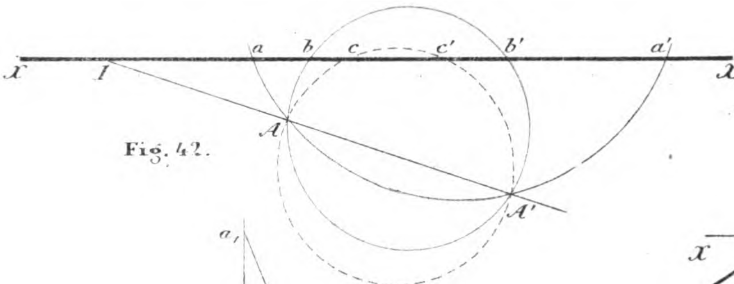


Fig. 42.

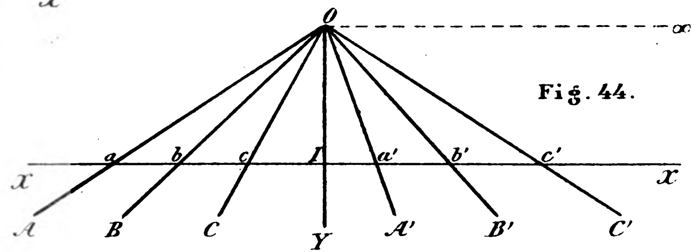


Fig. 44.

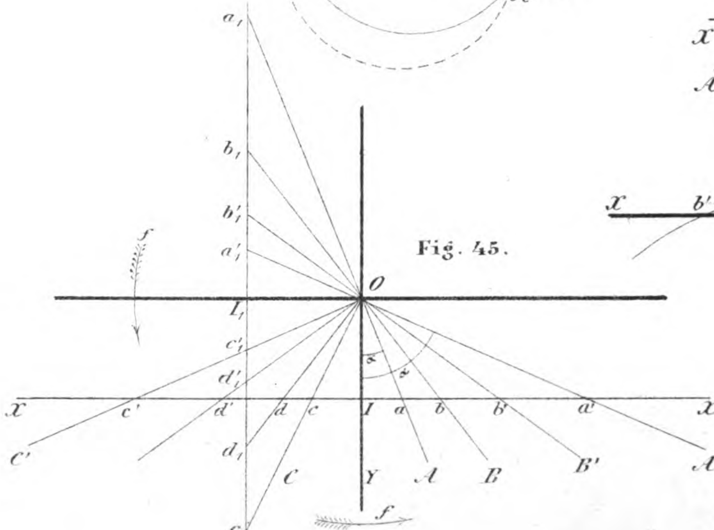


Fig. 45.

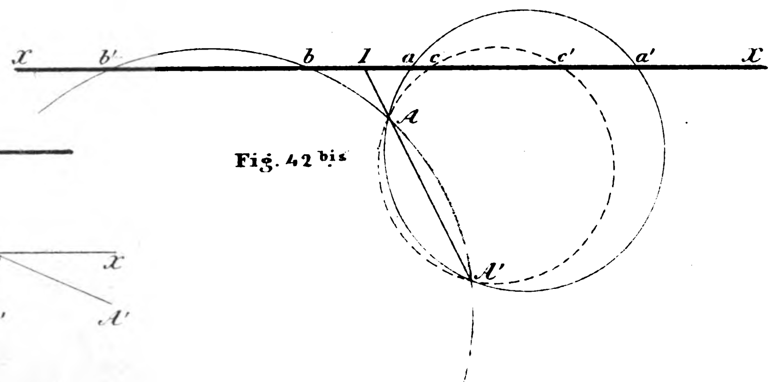


Fig. 42 bis

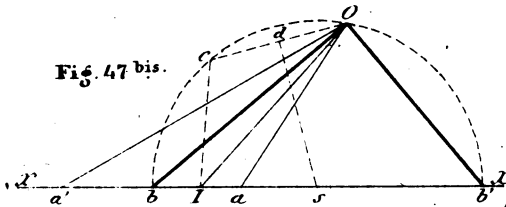


Fig. 47 bis.

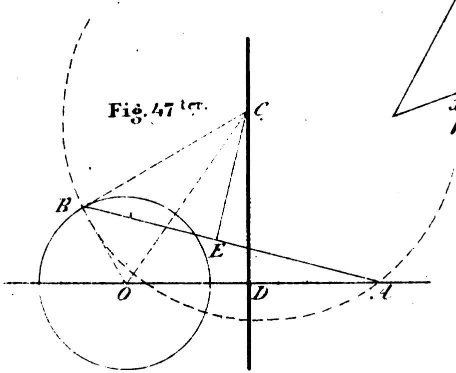


Fig. 47 ter.

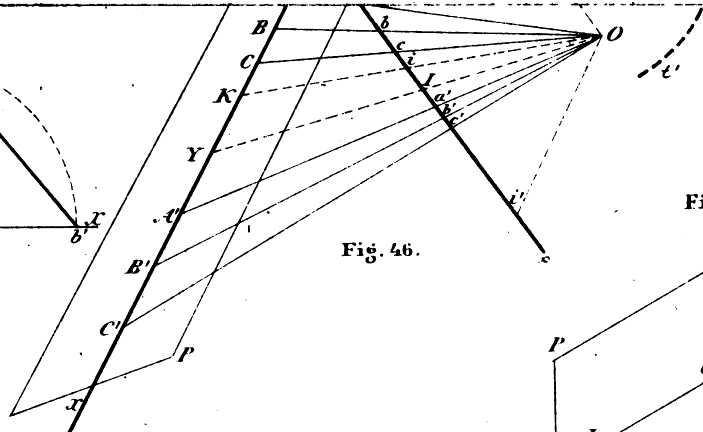


Fig. 46.

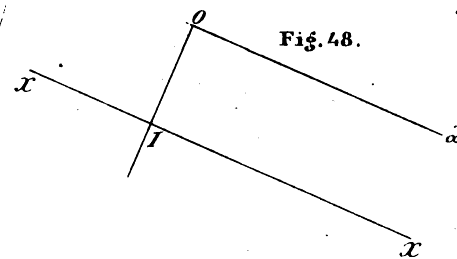


Fig. 48.

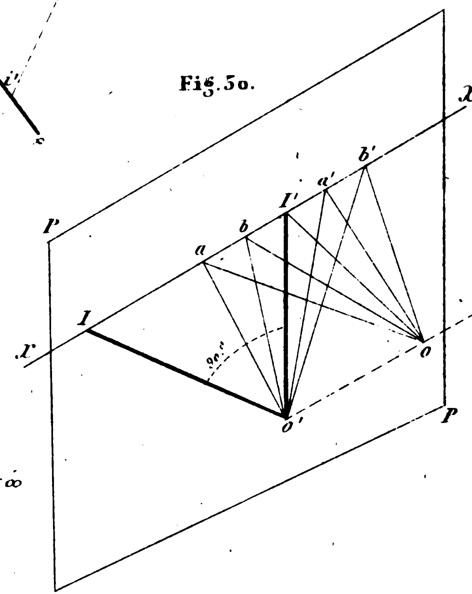


Fig. 50.

Fig. 49 bis.

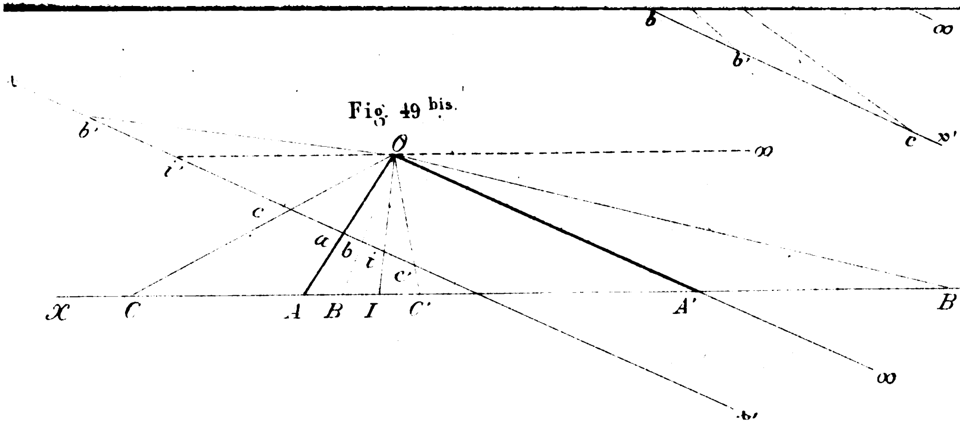


Fig. 51

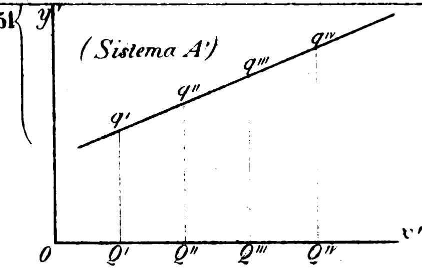


Fig. 52.

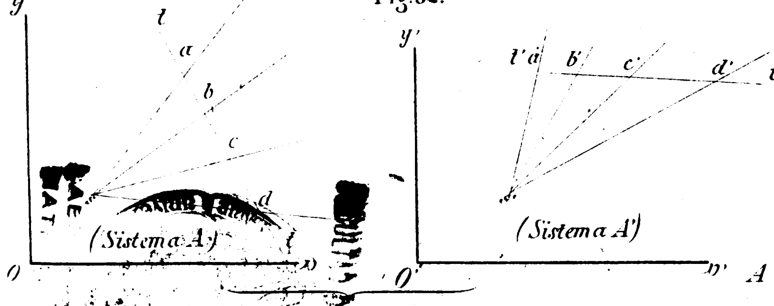
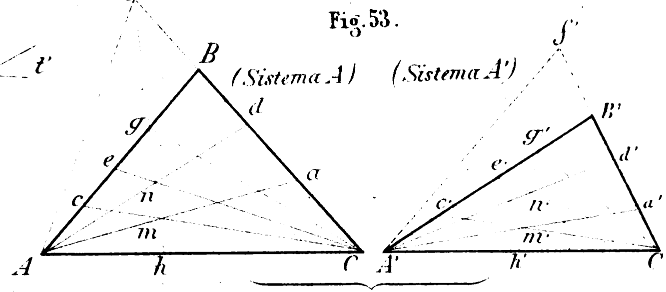


Fig. 53.



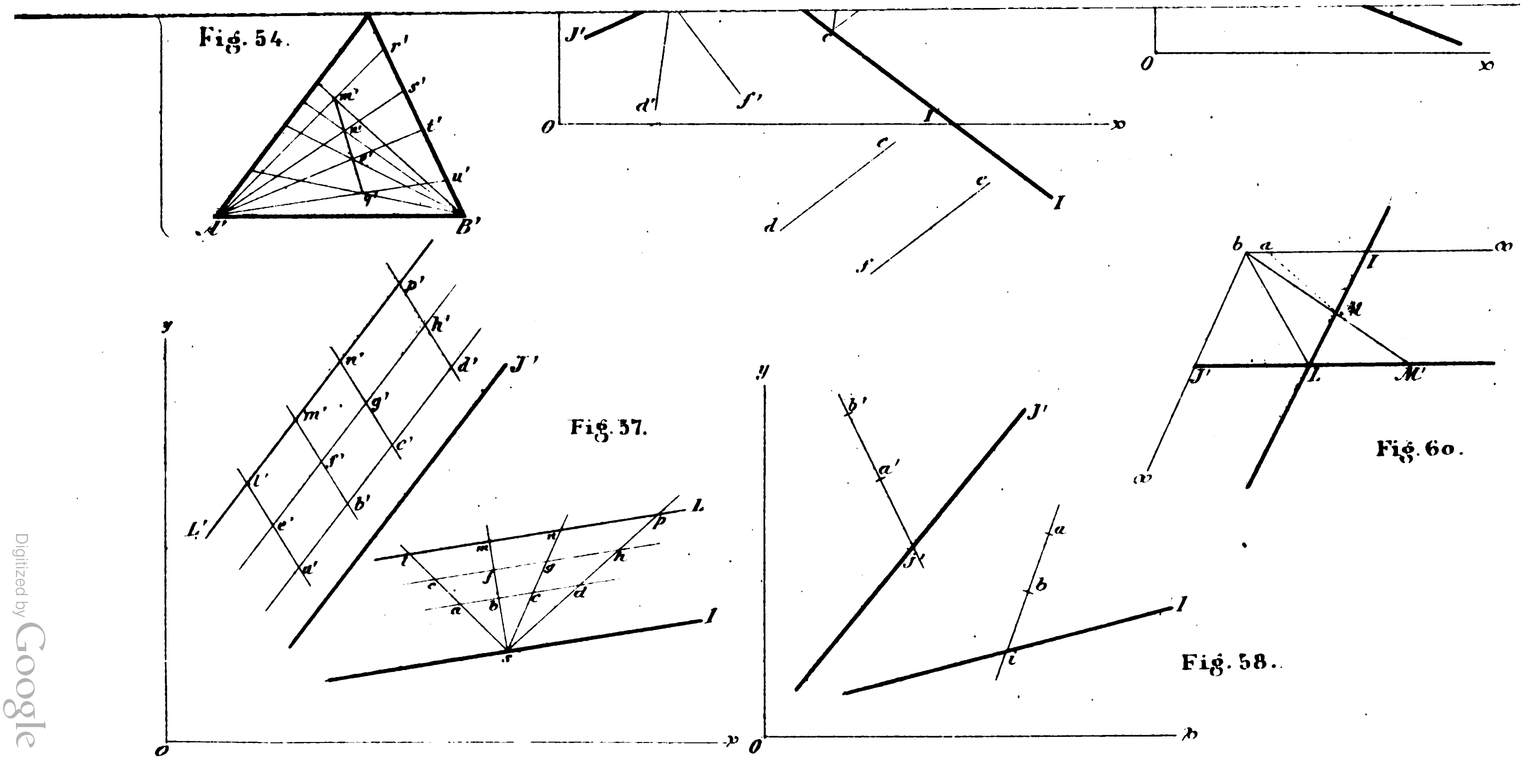


Fig. 54.

Fig. 57.

Fig. 58.

Fig. 60.

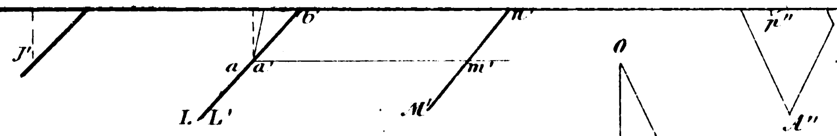
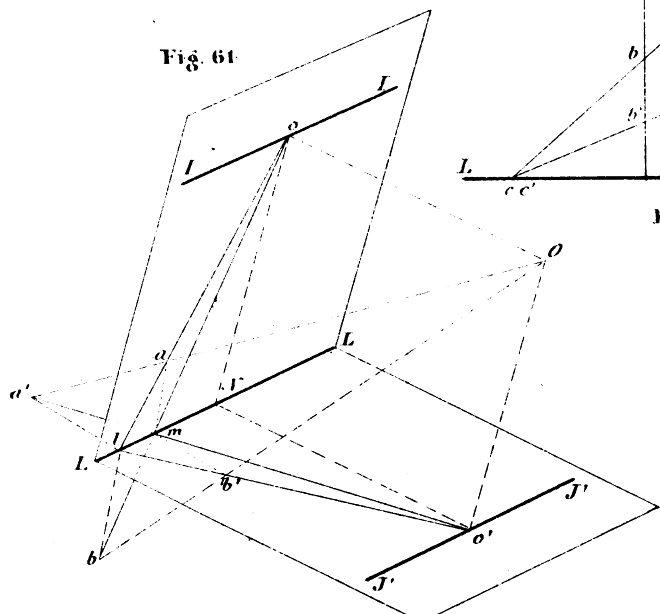

J'
a a'
b'
m'
M'
L L'
p''
A''

Fig. 61


I
o
I
O
L
N
m
l
L
a
a'
b'
b
o'
J'
J'

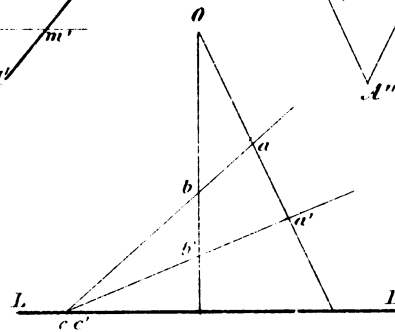
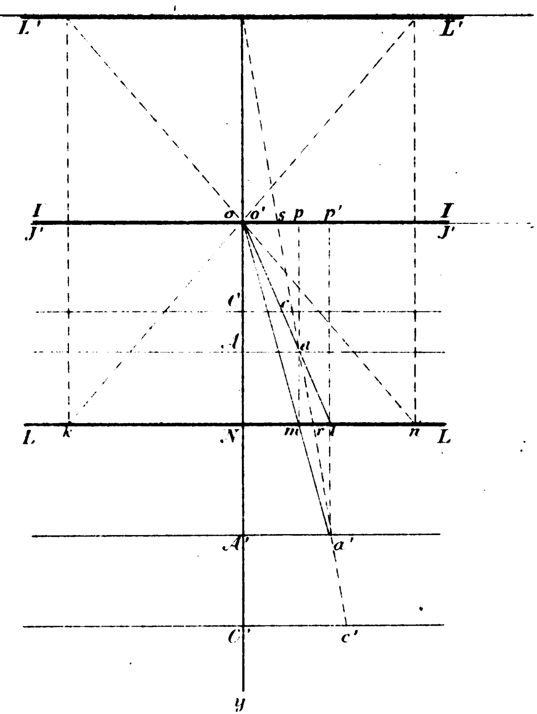
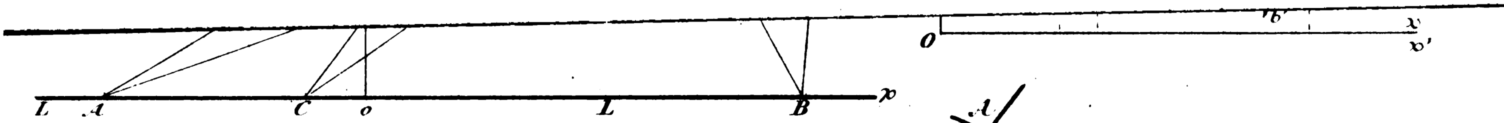

O
a
b
a'
b'
L
c c'
L

Fig. 63


L'
L'
I
J'
o o' s p p'
I
J'
C
c
A
a
L
k
N
m r l
n
L
A'
a'
C'
c'
y



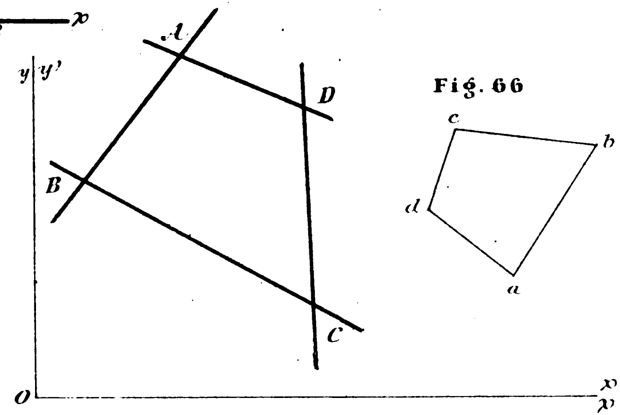


Fig. 66

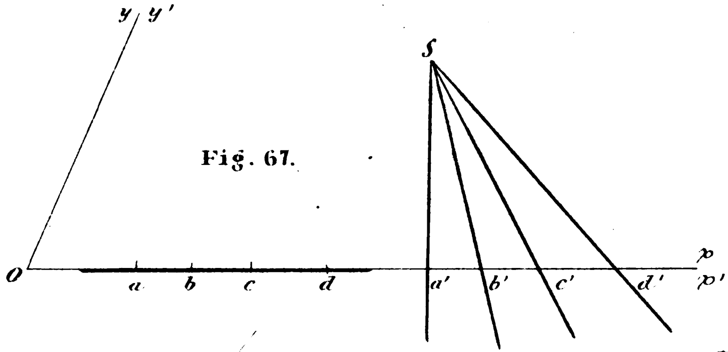


Fig. 67.

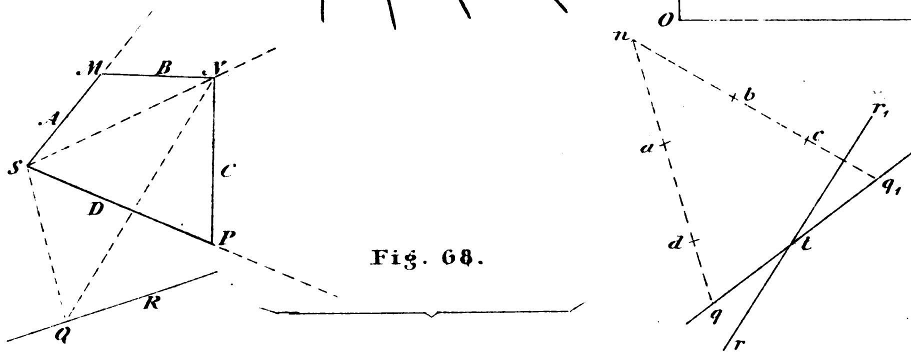
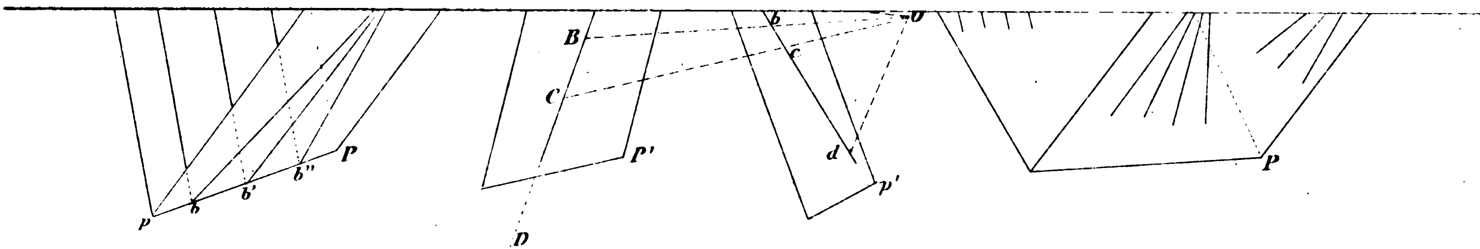


Fig. 68.



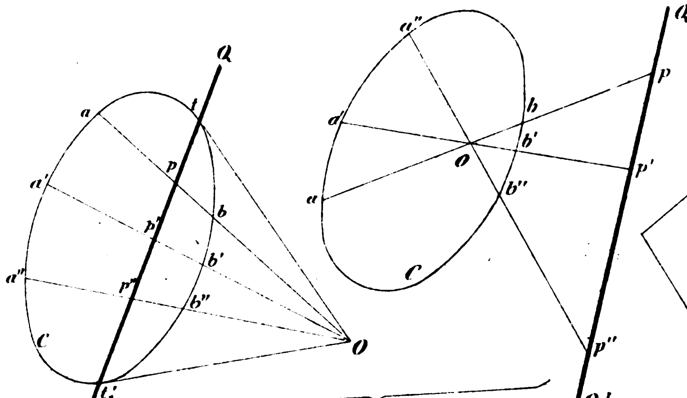
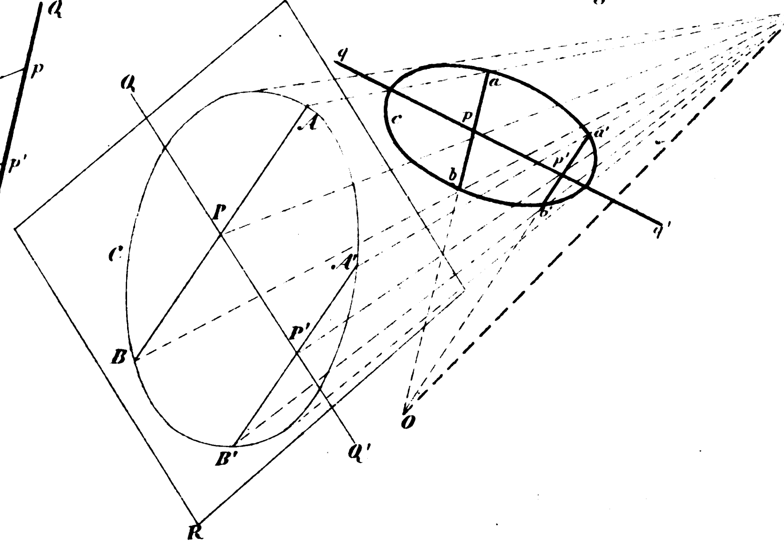
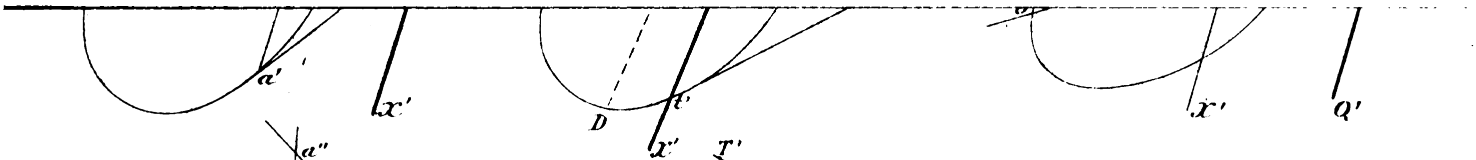


Fig. 72.

Fig. 73.





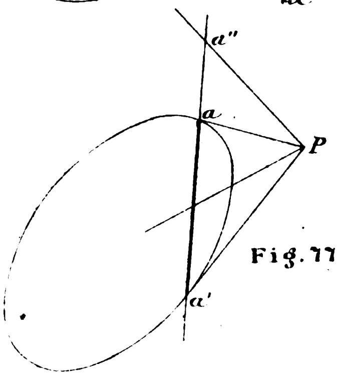


Fig. 77.

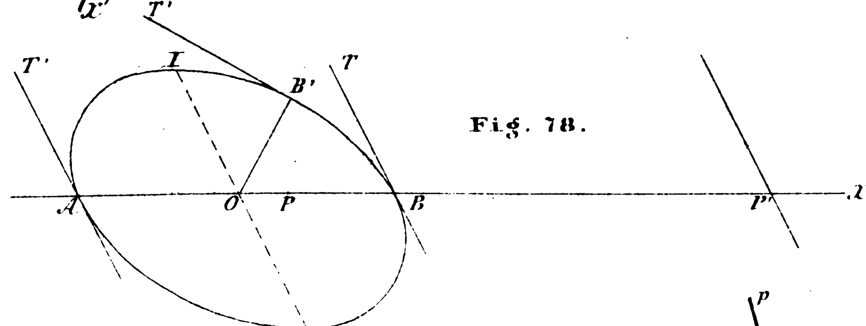


Fig. 78.

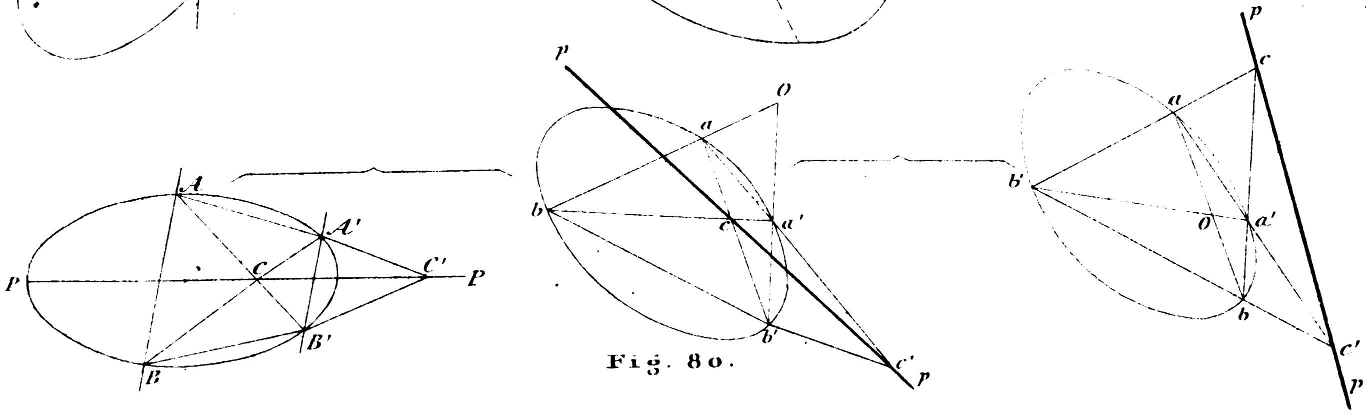


Fig. 80.

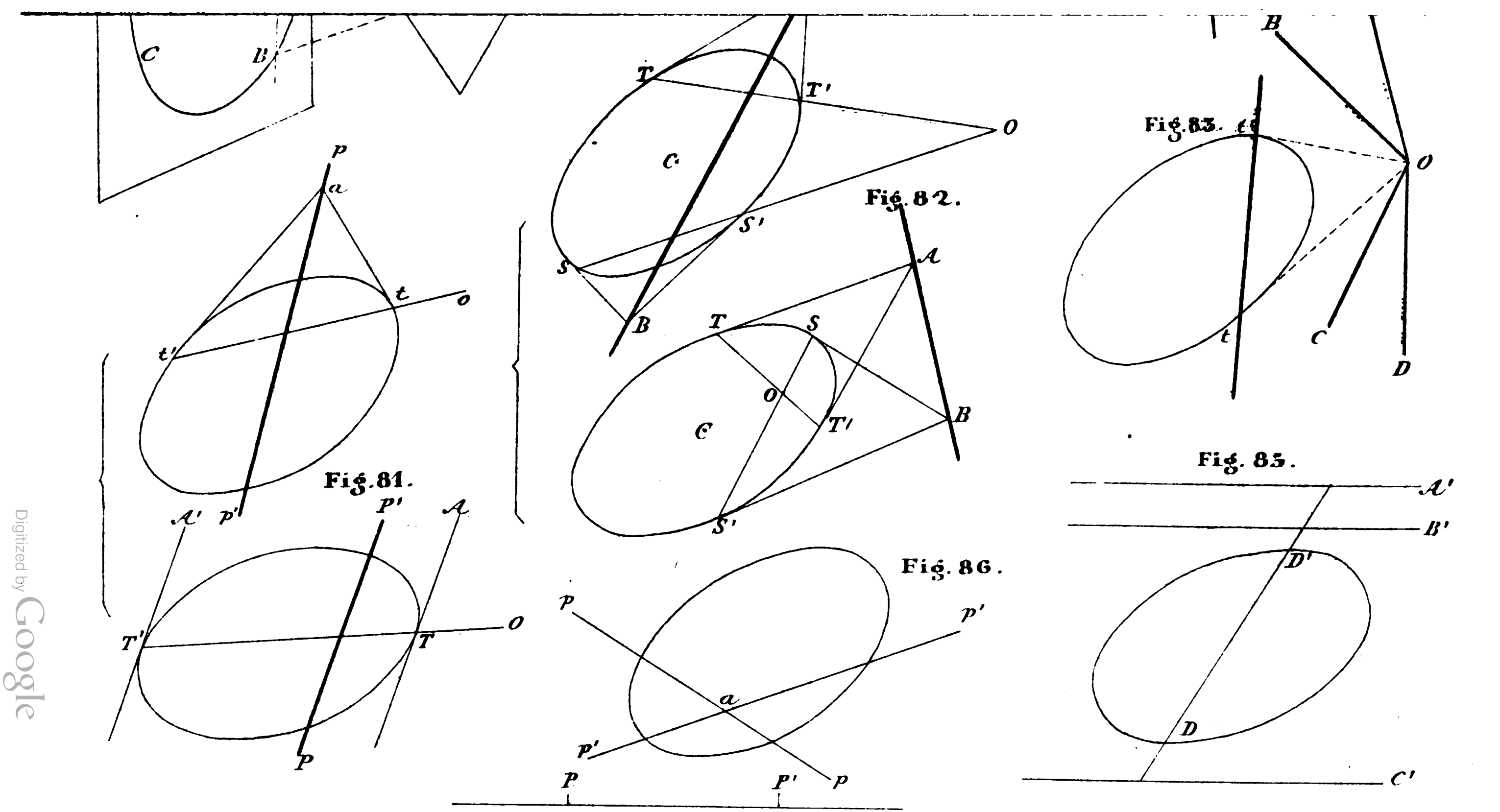


Fig. 81.

Fig. 82.

Fig. 83.

Fig. 85.

Fig. 86.

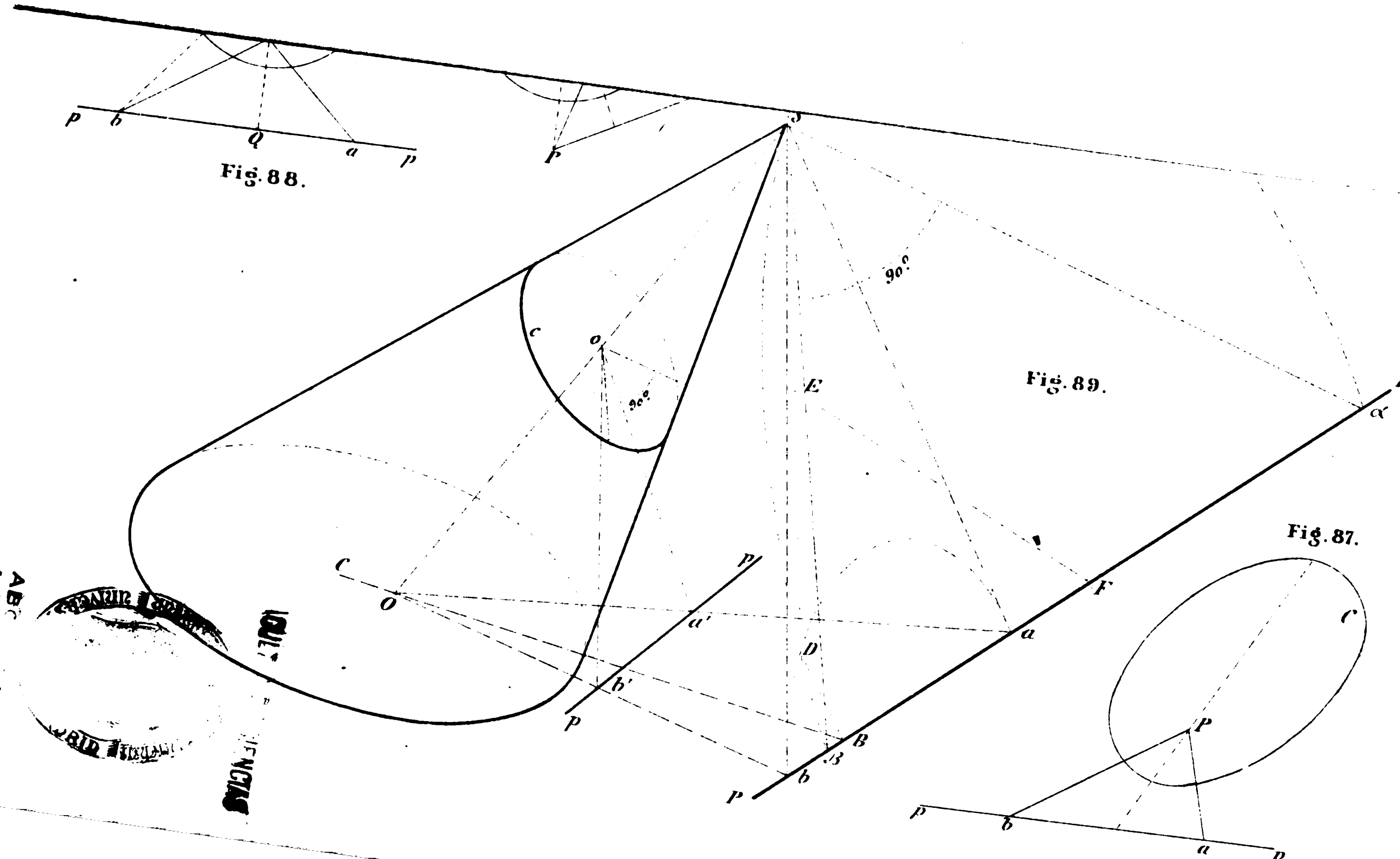


Fig. 88.

Fig. 89.

Fig. 87.

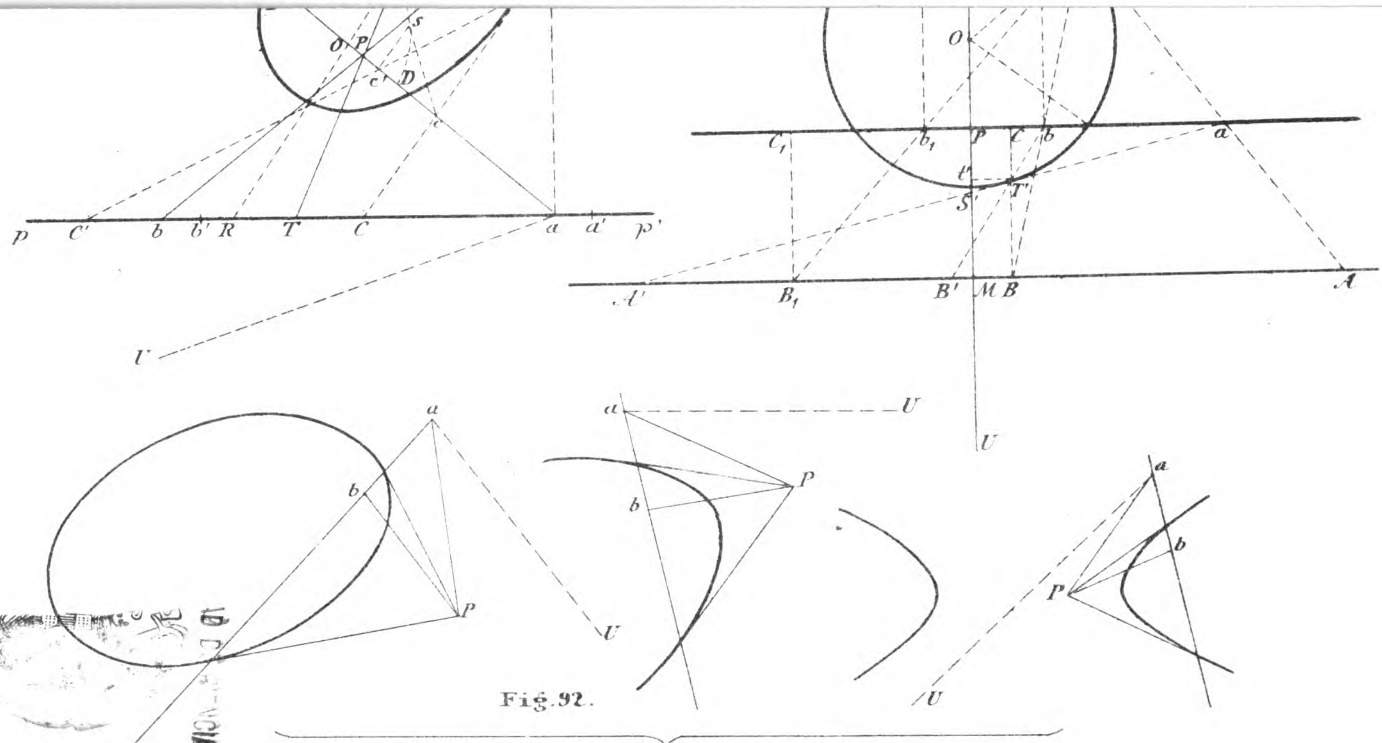


Fig. 92.

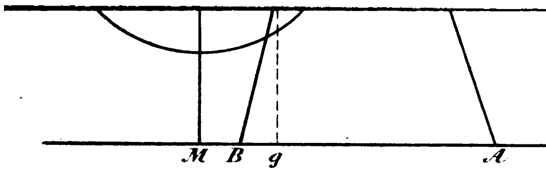
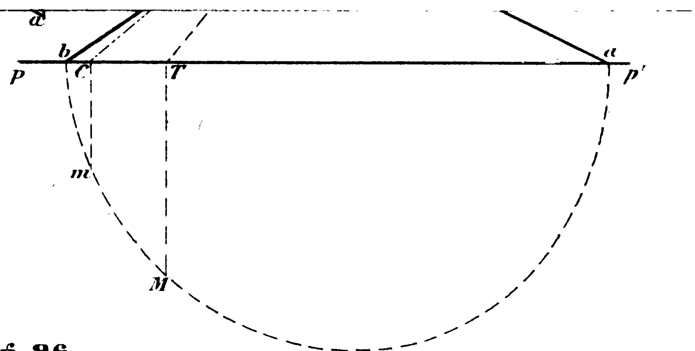


Fig. 93.

Fig. 94.



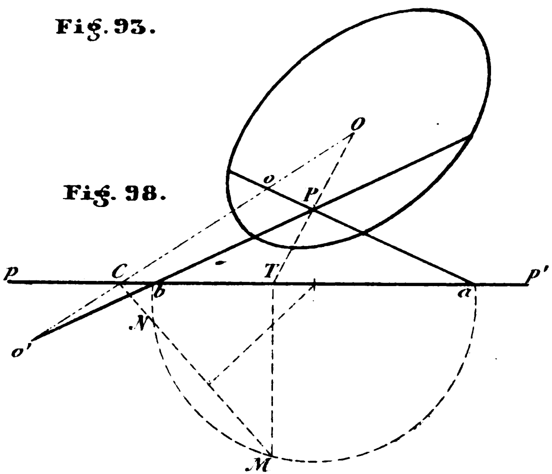
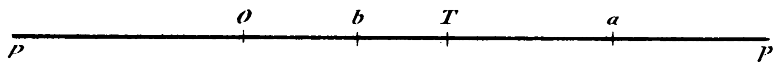


Fig. 98.

Fig. 96.



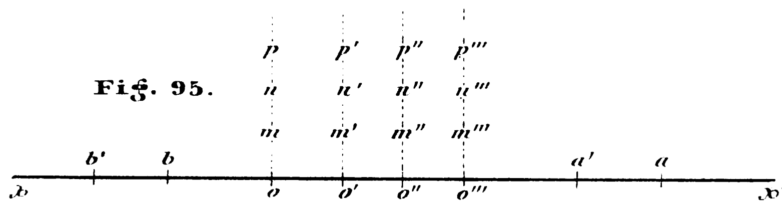
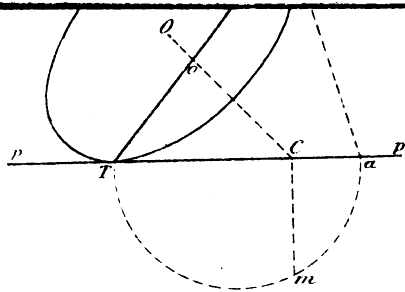
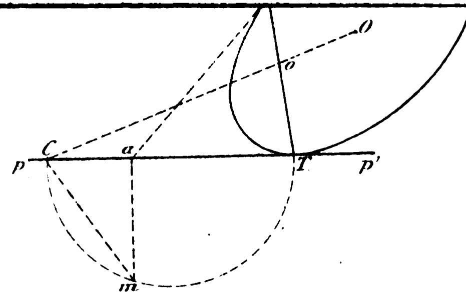


Fig. 95.





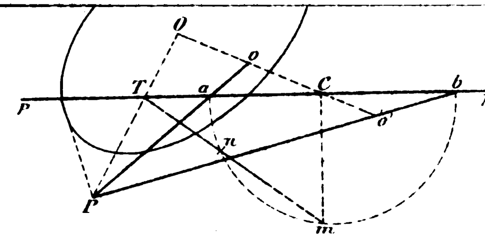


Fig. 102.

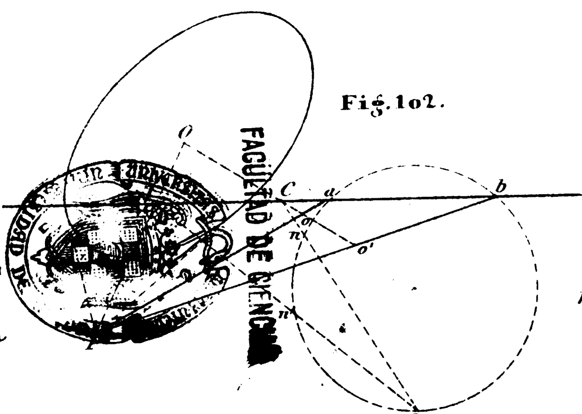


Fig. 104.

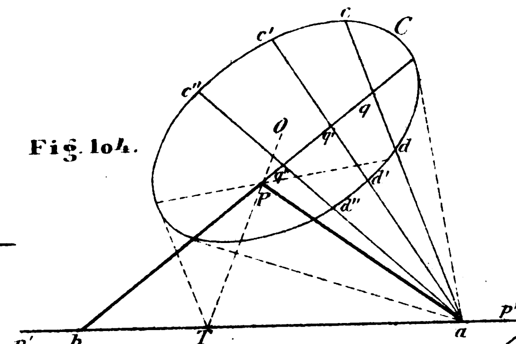
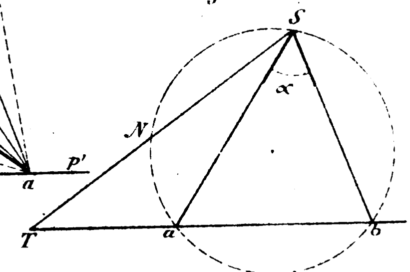


Fig. 105.



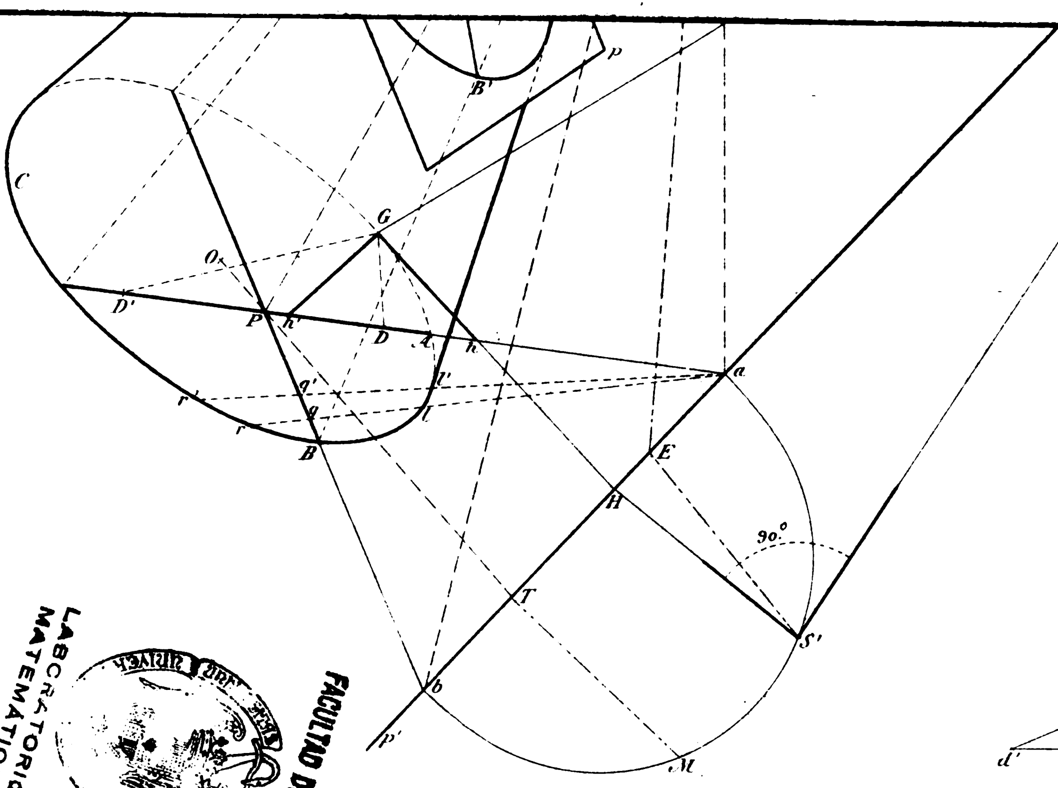


Fig. 107.

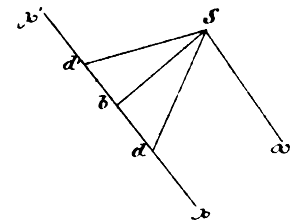


Fig. 106.